Alles Zufall?

Einsichten aus der Physik

Jürgen Audretsch

Der Zufall ist jedem schon oft begegnet. Jeder hat seine Erfahrungen mit ihm gemacht. Einen Bekannten unerwartet auf der Straße zu treffen, kann Zufall sein. Dies ist ein Beispiel für einen *Alltagszufall*. Er ist ein subjektiv als Zufall empfundenes Einzelereignis, hinter dem man – wenn man das will – auch Fügung vermuten kann. Der *physikalische Zufall* ist im Gegensatz hierzu der andere Typ von Zufall, der uns zum Beispiel beim Münzwurf, beim Würfeln, beim Ziehen einer Spielkarte, beim Roulette, bei der Urnenziehung oder dem Lotto begegnet. Er liegt objektiv vor und wird durch wohlbestimmte physikalische Prozeduren herbeigeführt, also gewissermaßen produziert. Er ist wiederholbar. Das charakterisiert ihn. So wird zum Beispiel eine Münze in immer der gleichen speziellen Weise „geschnippt" oder der Würfelbecher wird geschüttelt. Wir ergänzen noch, dass immer wieder behauptet wird, dass bei Quantenprozessen, anders als bei den angeführten Beispielen aus der klassischen Physik, ein genuiner oder absoluter physikalischer Zufall das Geschehen bestimmt. Was ist damit gemeint?

Alle Beispiele zeigen, dass es für jede Form von Zufall charakteristisch ist, dass er sich auf Einzelereignisse bezieht, die eintreten können, aber nicht notwendig eintreten müssen. Die also nicht determiniert sind. Wir wollen im Folgenden näher präzisieren, was unter physikalischem Zufall zu verstehen ist und zeigen, dass er nicht durch und durch strukturlos ist, sondern seine Regeln hat, die man in physikalische Gesetze fassen kann.

Zur Unterscheidung lässt sich bereits an dieser Stelle festhalten: Der Alltagszufall wird einem Einzelereignis zugeschrieben. Den physikalischen Zufall kann man demgegenüber erst erken-

nen, wenn man viele unter gleichen Bedingungen entstandene Ereignisse vergleicht. Erst wenn viele Sequenzen von Ereignissen eine *Zufallsstruktur* aufweisen – was das ist, werden wir präzisieren – wird man das Experiment als *Zufallsexperiment* bezeichnen. Nicht die Reproduzierbarkeit des Einzelereignisses, sondern nur die Reproduzierbarkeit der Versuchsbedingungen ist eine Voraussetzung dafür, dass sich die Struktur des physikalischen Zufalls zeigt. Einem Einzelereignis welcher Art auch immer kann demgegenüber eine physikalische (!) Zufälligkeit nicht zugeschrieben werden. Es ist unmöglich, für ein Einzelereignis das Fehlen einer Determiniertheit durch kausale Verursachung experimentell nachzuweisen.

Determiniertheit ist eine theoriebezogene Aussage. Das ist wichtig. Determiniertheit ist keine Charakterisierung, mit deren Hilfe Messergebnisse theoriefrei geordnet und beschrieben werden können. Nun kann es sein, dass es in der einen erfolgreichen Theorie für das Eintreten eines Ereignisses eine Ursache gibt und in einer anderen ebenfalls akzeptierten Theorie das gleiche Ergebnis als undeterminiert beschrieben wird. Wir können weder die Existenz der einen Theorie noch die der anderen ausschließen. Dazu müssten wir alle möglichen mit der Erfahrung übereinstimmenden Theorien kennen und das ist unmöglich. Da wir aber Zufall mit fehlender Determiniertheit als einer notwendig zu erfüllenden Bedingung verknüpft haben, ist der physikalische Zufall ein theorieabhängiges Konzept. Was in einer physikalischen Theorie zufällig ist, muss es nicht auch in einer anderen Theorie sein. Das ist ein grundlegendes Ergebnis, dass sich bereits ohne Bezug auf ein Experiment ableiten lässt. Wir werden im Folgenden immer zwischen der Beschreibung experimenteller Ergebnisse und ihrer theoretischen Begründung unterscheiden müssen. Wir beginnen mit den Experimenten.

Regellosigkeit beim einzelnen Münzwurf

Wir wollen den physikalischen Zufall am Beispiel von Münzwürfen studieren. Die Ergebnisse lassen sich dann weitgehend auf andere Zufallsexperimente übertragen. Wir verwenden viele auf gleiche Weise hergestellte Münzen, die im Hinblick auf den späteren Gebrauch statt Wappen und Zahl auf ihren Seiten die Zahlen 0 oder 1 tragen. Wir führen sehr viele Würfe unter gleichen Bedingungen durch. Der Münzwerfer wirft also immer mit derselben Bewegung *(Abb. 1)*. Die Bedingungen, unter denen die Würfe stattfinden, sind reproduzierbar. Wir fordern aber andererseits, dass nicht alle Würfe dieselbe Zahl als Ergebnis haben. Das charakterisiert den Typ von Münzwurf, den man üblicherweise mit Zufall verbindet und den wir im Folgenden verwenden wollen. Man kann auch andere Würfe durchführen. Zum Beispiel den, bei dem eine waagerecht ausgerichtete Münze mit der Zahl 1 nach oben wenige Millimeter über einer waagerechten Platte losgelassen wird *(Abb. 2)*

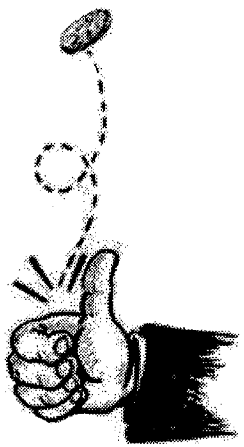

Abb. 1: Münzwurf als Teil eines Zufallsexperiments. Die dabei verwendete Form des Werfens einer Münze nennen wir Schnippen.

Das Ergebnis ist dann immer die Zahl 1. Wir verlangen demgegenüber von unseren Würfen, dass auch das Ergebnis 0 eintreten kann. Das zeigt, dass nicht alle reproduzierbaren „Wurf"-Bedingungen als Grundlage für ein Zufallsexperiment dienen können. Wir betrachten zunächst nur die experimentellen Resultate, die bei vielen in gleicher Weise durchgeführten Münzwürfen gefunden werden. Die einzelnen Würfe sind voneinander unabhängig. Sie beeinflussen sich nicht wechselseitig. Man kann viele Würfe mit derselben Münze nacheinander durchführen oder mit vielen gleichartigen Münzen in derselben Weise nur einmal werfen. Das kann insbesondere auch gleichzeitig geschehen. Die zentrale Beobachtung, die man dabei macht, ist allgemein bekannt: Man kann keine Regelmäßigkeit dafür finden, welches Wurfergebnis als Nächstes folgt. Man findet keinen Ansatzpunkt für eine Vorhersagbarkeit eines Einzelergebnisses, auch wenn alle vorhergegangenen oder gleichzeitig erhaltenen Ergebnisse bekannt sind. Für die Formulierungeiner Theorie des Münzwurfs wird man daher sinnvollerweise davon ausgehen, dass der Einzelwurf kein deterministischer Prozess ist. Die notwendige Bedingung für Zufälligkeit ist erfüllt.

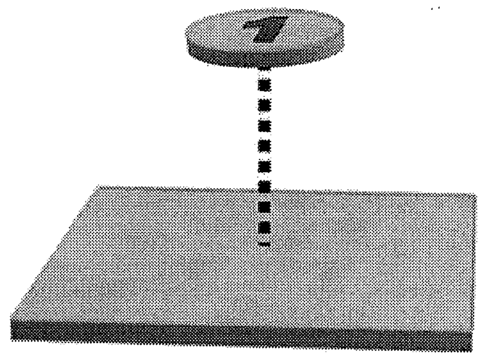

Abb. 2: Nicht jede Art, eine Münze zu werfen, ist für ein Zufallsexperiment brauchbar.

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

Wir haben sehr oft die Münze geworfen und eine Sequenz aus den Ergebnissen 0 und 1 erhalten, zum Beispiel

0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1.......0 1 1 0 ....

Um eine einzelne Sequenz zu charakterisieren, führen wir den Begriff der *relativen Häufigkeit* ein, mit der sich ein Resultat (z. B. die 0) in der Sequenz findet. Die Definition ist:

Relative Häufigkeit eines Resultats = Häufigkeit dieses speziellen Resultats dividiert durch die Gesamtzahl aller Resultate.

Wenn die 0 doppelt so oft auftritt wie die 1, dann ist ihre relative Häufigkeit 2/3 oder 66,66 %. Man sagt dann auch, dass die *Wahrscheinlichkeit* w eine 0 zu finden gleich 2/3 ist und schreibt

$w(0) = 2/3 \quad , \qquad w(1) = 1/3 \quad .$

Es gilt nach Konstruktion immer $w(0)+w(1) = 1$.

Die so eingeführten Wahrscheinlichkeiten sind keine Wetten und drücken auch keine Grade der Überzeugung oder der Vermutung aus. Sie sind objektive Wahrscheinlichkeiten, die operational als relative Häufigkeiten eingeführt sind. Jeder kommt bei der Auszählung der relativen Häufigkeit der 0 in einer Sequenz zum gleichen Ergebnis. Die relative Häufigkeit bezieht sich stets auf die ganze sehr lange Beobachtungsreihe. Es wird die Annahme gemacht, dass bei einer beliebig großen Verlängerung der Beobachtungsreihe die ausgezählten relativen Häufigkeiten gegen feste Werte gehen.

Gesetzmäßigkeiten bei Sequenzen von Würfen

Wir können mit einer anderen Münze eine ganze Sequenz von Würfen durchführen. Wieder werden die relativen Häufigkei-

ten w(0) und w(1) ausgezählt. Möglicherweise kommen wir mit dieser Münze zu anderen Ergebnissen. Münzen, die auf $w(0) = ½$ und $w(1) = ½$ führen, werden oft *symmetrische Münzen* genannt.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und führen mit einer Münze nicht nur eine, sondern viele Sequenzen von Münzwürfen aus. Für alle werden die jeweiligen relativen Häufigkeiten für 0 und 1 bestimmt. Dabei stellen wir eine Gesetzmäßigkeit fest: Die relativen Häufigkeiten (z. B. $w(0) = 2/3$ und $w(1) = 1/3$) stimmen für alle sehr langen Sequenzen, die mit der gleichen Münze gewonnen wurden, perfekt überein. Es kann eine sichere Prognose für die nächste Sequenz gemacht werden. Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir die einzelne Sequenz dadurch gewinnen, dass wir mit einer großen Zahl völlig gleichartiger Münzen jeweils nur einen Wurf durchführen.

Was wir für den Münzwurf gefunden haben, gilt entsprechend verallgemeinert für das Würfeln und alle anderen oben angeführten Beispiele für physikalischen Zufall. Es gibt also bei der Diskussion des physikalischen Zufalls drei Ebenen: Einzelfall – einzelne Sequenz – viele Sequenzen. Für den physikalischen Zufall hat sich gezeigt, dass für das Auftreten der verschiedenen Ergebnisse 0 und 1 beim Einzelwurf keine Gesetzmäßigkeit zu beobachten ist. Die theoretische Behandlung kann davon ausgehen, dass er nicht determiniert und damit zufällig ist. Die relative Häufigkeit bei Sequenzen liegt demgegenüber fest. Nur wenn das der Fall ist, sprechen wir von *physikalischem Zufall* oder dem Vorliegen einer Zufallsstruktur. Dieses empirische Ergebnis ist objektiv und reproduzierbar und muss von der Theorie wiedergegeben werden.

Die Gesetzmäßigkeit bei vielen Sequenzen tritt nur unter einer Voraussetzung auf: Die Münze muss bei jedem einzelnen Versuch in gleicher Weise „geworfen" werden. Diese Reproduzierbarkeit der Präparation ist eine Hauptvoraussetzung. Die Beobachtung besagt dann, dass es eine spezielle Art und Weise zu „werfen" gibt (vergl. *Abb. 1*), bei der die Einzelergebnisse regellos und die relative Häufigkeiten in den Sequenzen stets gleich sind. Wir wollen diese Form des „Werfen“ der Münze als „Schnippen“ bezeichnen.

Ganz allgemein nennen wir experimentelle Aufbauten und Prozeduren, mit denen sich die Gesetzmäßigkeiten des physikalischen Zufalls erfüllen lassen, *Zufallsexperimente*. Eine Sequenz wie die oben angegebene können wir als Binärzahl auffassen. Wenn sie das Ergebnis eines Zufallsexperiments ist, wird sie als *Zufallszahl* bezeichnet. Aber wann weiß man, dass ein Experiment ein Zufallsexperiment ist, dass also zum Beispiel jemand die Münze schnippt und nicht nur irgendwie in Bewegung setzt? Ganz einfach dann, wenn die Gesetzmäßigkeiten für Zufallsexperimente erfüllt sind. Die keineswegs selbstverständliche Aussage über die Natur ist somit die, dass sich Zufallsexperimente realisieren lassen. Es gibt diese Kombination aus Regellosigkeit und Regelhaftigkeit, die den physikalischen Zufall ausmacht. Es gelingt zum Beispiel, Münzen in wiederholbarer Weise zu schnippen. Das ist dann der Münzwurf, von dem man im Zusammenhang mit Zufall spricht. Genauso kann man Würfel mithilfe eines Würfelbechers so in Bewegung setzen, dass die Ergebnisse mehrfachen Würfelns eine Zufallsstruktur aufweisen.

Relative Häufigkeiten der verschiedenen Sequenzen

Wir wollen die Diskussion des physikalischen Zufalls noch vertiefen. Der Einfachheit halber beziehen wir uns auf symmetrische Münzen. Die Ergebnisse lassen sich wieder leicht auf andere Zufallsexperimente übertragen. Wir analysieren nach wie vor nur die experimentellen Ergebnisse und fragen uns, ob aus den relativen Häufigkeiten w(0) = ½ und w(1) = ½ für symmetrische Münzen folgt, dass zum Beispiel das Ergebnis

0 0 0 0 0 0……0 0 0…. (nur Nullen)

nicht auftreten kann. Auf der Grundlage der bisher beschriebenen Ergebnisse stellt sich noch eine weitere Frage: Woher „weiß“ die einzelne Münze, wie sie fallen muss, damit sich für die entsprechende Sequenz die richtigen relativen Häufigkeiten ergeben? Welchen Sinn macht diese Frage, wenn doch vorausgesetzt ist, dass die Würfe voneinander unabhängig sind?

Wir führen mit beispielsweise 16.000 symmetrischen Münzen jeweils eine Abfolge von Zufallsexperimenten durch und notieren für jede Münze, welche Ergebnisse sich nacheinander ergeben haben *(Abb. 3)*. Es entstehen also 16.000 Zufallssequenzen. Wir wollen sie Schritt für Schritt gewinnen. Im ersten Schritt wird mit jeder Münze ein Wurf durchgeführt. Dabei ergibt sich näherungsweise 8.000-mal die 0 und 8.000-mal die 1. Das sind die ersten Zahlen in den 16.000 Sequenzen. Beim zweiten Wurf führen zum Beispiel die Münzen, die beim ersten die 0 angezeigt haben, in näherungsweise 4.000 Fällen auf die 0 und in 4.000 Fällen auf die 1. Wir ergänzen die entsprechenden Sequenzen, deren erste Zahlen damit 0 0 beziehungsweise 0 1 lauten. Hatte der erste Wurf das Ergebnis 1, dann werden die ersten Zahlen 1 0 beziehungsweise 1 1. Nachdem jede Münze dreimal geschnippt wurde, liegen drei Anfangszahlen fest. Es gibt 8 verschiedene Kombinationen der Zahlen 0 und 1. Die entsprechenden Sequenzen treten jeweils 2.000-mal auf. Dabei ist die relative Häufigkeit des Auftretens für alle Sequenzen einheitlich gleich 1/8, denn bei allen Verzweigungen ergeben sich die resultierenden Zweige stets mit der relativen Häufigkeit ½. Es entstehen immer längere Sequenzen, die alle mit gleicher relativer Häufigkeit auftreten. Der Wert dieser relativen Häufigkeit nimmt dabei ständig ab. Zur Veranschaulichung nennen wir die relative Häufigkeit wieder Wahrscheinlichkeit. Dann besagt das Ergebnis, dass jede Sequenz, also auch die aus lauter Nullen, immer unwahrscheinlicher wird je länger die Sequenzen werden. Die Sequenz aus lauter Nullen ist daher nicht unmöglich, sie ist nur so unwahrscheinlich, dass wir ihr in der Praxis nicht begegnen. Wir sind auf sie in unserem Ausgangsexperiment nicht getroffen.

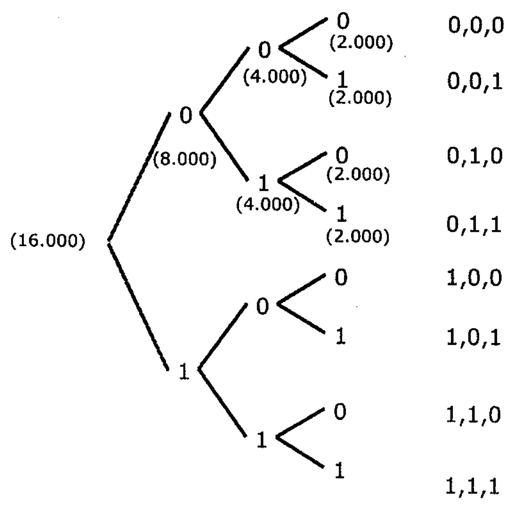

Abb. 3: Abfolge (nach rechts) von Zufallsexperimenten mit 16.000 symmetrischen Münzen. An jeder Verzweigung wird geworfen. Die Münzen werden nach dem Ergebnis 0 bzw. 1 sortiert. Die Werte, die nacheinander für eine Münze erhalten wurden, stellen eine Zufallszahl dar. Es gibt nach dem dritten Wurf z. B. 2.000 Münzen, die die Sequenz 010 angezeigt haben. Die verschiedenen Sequenzen aus drei Zahlen sind rechts notiert. Sie treten alle mit der gleichen relativen Häufigkeit 1/8 auf.

Es sind lauter unterschiedliche Sequenzen entstanden. Wie steht es mit unserer Behauptung, dass beim Schnippen symmetrischer Münzen die relativen Häufigkeiten für 0 und 1 in jeder Zufallsfolge gleich sind? Auch hier untersuchen wir wieder den Grenzfall sehr langer Zufallszahlen.

Herausbildung der Gesetzmäßigkeit

Wir erweitern das im vorigen Abschnitt beschriebene Experiment und schnippen jede Münze viermal. Es ergeben sich 16

verschiedene Sequenzen und somit 16 verschiedene Zufallszahlen *(Abb. 4)*. Jede dieser Zufallszahlen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 1/16 auf. Wir finden eine Sequenz, bei der viermal die Null auftritt. Weiterhin gibt es 4 Sequenzen mit einmal der 1 und dreimal der 0. Die Sequenzen, die die 0 und die 1 gleich oft enthalten, werden *ausgeglichene Sequenzen* genannt. Sie treten am häufigsten auf, nämlich sechsmal. Es folgen dann in abnehmender Zahl Sequenzen, bei denen die 1 am häufigsten auftritt.

0000	4x0		1 Sequenz Häufigkeit 1/16
....			
....	jeweils		4 verschiedene Sequenzen
....	1x1		Gesamthäufigkeit 4/16 = 2/8
....	3x0		
0011			
0101	jeweils	gleich viele	6 verschiedene Sequenzen
0110	2x0	0 und 1 :	Gesamthäufigkeit 6/16 = 3/8
1100	2x1	<u>ausgeglichen</u>	
1010			
1001			
....			
....	jeweils		4 verschiedene Sequenzen
....	1x0		Gesamthäufigkeit 4/16 = 2/8
....	3x1		
1111	4x1		1 Sequenz Häufigkeit 1/16

Abb.4: Dargestellt sind die Ergebnisse, die man mit vier Würfen bei der Prozedur von Abb. 2 erhält. Links stehen die verschiedenen Zufallszahlen. Sie werden jeweils mit der relativen Häufigkeit 1/16 erhalten. Sortiert sind die Zahlen danach, wie häufig sie 0 bzw. 1 enthalten. Es zeigt sich, dass die relative Häufigkeit der Sequenzen, bei denen 0 bzw. 1 gleich häufig auftritt, am größten ist. Bei vier Würfen ist sie 3/8. Mit wachsender Länge der Zufallszahlen nähert sie sich ½ an.

Es zeichnet sich bereits bei dieser geringen Zahl von Würfen eine Regelmäßigkeit ab: Je häufiger man schnippt umso mehr verschiedene Sequenzen sind möglich. Alle treten mit gleicher Häufigkeit auf, die mit wachsender Länge der Sequenzen immer kleiner wird. Die Zahl der ausgeglichenen Sequenzen, die also mit gleicher relativen Häufigkeit 0 bzw. 1 enthalten, nimmt demgegenüber zu. Für immer längere Sequenzen geht die Wahrscheinlichkeit eine nicht ausgeglichene Sequenz zu finden gegen null. Darum haben wir experimentell auch $w(0) = ½$ und $w(1) = ½$ gefunden. Zufallsexperimente, die ausgeglichene Zufallszahlen produzieren, sind für technische Anwendungen von großer Bedeutung. Wir wollen eine Anwendung skizzieren.

Perfekte Sicherheit in der Kryptographie

Alice will Bob eine Nachricht schicken. Man nennt sie den *Klartext*. Eve möchte in den Besitz dieses Klartexts kommen. Um das zu verhindern, verschlüsselt Alice den Klartext. Es entsteht der *Geheimtext*. Eve „hört ab", bringt sich also in den Besitz des Geheimtextes und versucht aus ihm Informationen über den Klartext zu gewinnen. Wenn Alice ein perfektes Verschlüsselungssystem verwendet, ist das unmöglich. Der Lauschangriff misslingt.

Ein bekanntes Verschlüsselungsverfahren, das man perfektionieren kann, ist die Vernam-Verschlüsselung, die vom US-amerikanischen Ingenieur Gilbert Vernam 1917 erfunden wurde. Man formuliert den Klartext in der Form einer Binärzahl, z. B. 01191100. Der Zusammenhang mit dem Buchstabentext ist eindeutig. Die Verschlüsselung besteht darin, dass man einen ebenfalls binär formulierten Schlüsseltext, z. B. 10000110, zum Klartext hinzuaddiert. Dabei gelten die Rechenregeln: 0+0 = 0, 0+1 = 1, 1+0 = 1, 1+1 = 0. So entsteht der Geheimtext 11101010, der ohne Geheimhaltungsvorkehrungen, also für Eve einsehbar, Bob zugeschickt wird.

Klartext	01101100
+ Schlüssel	10000110
= Geheimtext	11101010

Zur Entschlüsselung verwendet Bob wieder den Schlüsseltext in gleicher Weise. Er addiert ihn unter Beachtung der Rechenregeln zum Geheimtext hinzu und erzeugt so wieder den Klartext.

Geheimtext	11101010
+ Schlüssel	10000110
= Klartext	01101100

Verschlüsselung und Entschlüsselung sind also recht einfach. Bleibt die Frage, ob die Verschlüsselung durch Alice perfekt ist. Der amerikanische Mathematiker Claude Elwood Shannon bewies 1949 den Satz, dass diese Verschlüsselung perfekt ist, wenn man als Schlüssel Zufallszahlen gleicher Länge verwendet, die aus einem ideal durchgeführten Zufallsexperiment stammen. Perfekte Sicherheit besteht dann darin, dass sich für Eve durch das Lesen des Geheimtextes die Information über den Klartext nicht erhöht. Sie ist „so klug als wie zuvor". Darin liegt die große kryptologische Bedeutung von Zufallsexperimenten. Durch die Zufallszahl als Schlüssel wird der Klartext „verwirbelt". Das geschieht aber so, dass Bob ihn wieder leicht rekonstruieren kann.

Das geschilderte Verfahren ist sehr aufwendig. Denn zu jedem Klartext muss ein neuer Schlüssel gleicher Länge im Zufallsexperiment erzeugt werden. Ein Schlüssel darf nicht mehrmals verwendet werden. Das zentrale Problem ergibt sich dadurch, dass das Zufallsexperiment perfekt sein muss. Das reale Schnippen einer Münze erfüllt nur näherungsweise die Bedingung. Das zweite große Problem besteht darin, dass Alice und Bob in den Besitz des gleichen Schlüssels kommen müssen, ohne dass Eve etwas über diesen Schlüssel erfährt. Beide Probleme kann man durch Verwendung verschränkter Quantensysteme lösen. Die paarweise gleichen Schlüssel werden dann erst bei Alice bzw. Bob durch eine Quantenmessung in perfekt zufälliger Weise erzeugt. Eve kann aber nur vorher eingreifen. Daher kann sie auch nichts auslesen. Diese kurze Darstellung zeigt, wie wichtig in der Praxis Zufallsexperimente sind. Eine bedeutende Rolle spielen dabei diejenigen, die auf Quantenphänomenen beruhen.

Lokalisierung des Zufalls

Es ist für das Verständnis der Struktur des Zufalls hilfreich, die Frage zu untersuchen, wo der Zufall in einem Zufallsexperiment lokalisiert ist. Betrachten wir dazu das typische experimentelle *Szenario der Physik (Abb. 5)*. Zu Beginn wird ein physikalisches System *präpariert*. Zum Beispiel wird eine kleine Metallkugel elektrisch geladen und abgeschossen. Die Kugel fliegt zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten hindurch und wird dabei in ihrer Bahn abgelenkt. Das ist ein *äußerer Einfluss*, der sich an die Präparation anschließt. Schließlich werden in einer *Messung* Ort und Geschwindigkeit der Kugel bestimmt. Bei präziser Präparation legen Newtonsche Mechanik und Maxwellsche Elektrostatik das Ergebnis eindeutig fest. Bei diesem Beispiel handelt es sich nach Aussage dieser Theorien um den Spezialfall eines deterministischen Szenarios. Das gleiche Schema „Präparationen – äußerer Einfluss – Messung" findet man auch in anderen physikalischen Situationen, bei denen es nicht um eine zeitliche Entwicklung geht. Man kann zum Beispiel eine Menge von verdünntem Gas in einem Behälter betrachten. Das Gas steht unter Druck, es hat eine bestimmte Temperatur hat und nimmt dabei ein bestimmtes Volumen ein (Präparationen). Hält man das Volumen konstant und erhöht die Temperatur (äußerer Einfluss), dann registriert man (Messung) auch bei Wiederholung des Experimentes stets dieselbe Druckerhöhung. Sie lässt sich mithilfe der idealen Gasgleichung im Einzelnen berechnen. Auch in diesem Fall ist das Szenario deterministisch.

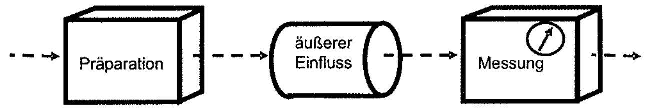

Abb. 5: Das experimentelle Szenario der Physik

Der Aufbau des Szenarios legt es unmittelbar nahe, verschiedene Zufallstypen nach ihrer Lokalisierung zu unterscheiden. Es gibt einmal den *Präparationszufall*. Beim reinen Präparationszufall sind äußerer Einfluss und Messung deterministisch. Beim *Einflusszufall* sind Präparation und Messung deterministisch. Beim *Messzufall* sind es Präparation und äußerer Einfluss. Mehrere Zufallstypen können zusammentreffen. Wie ordnet sich unser Münzwurf in dieses Schema ein? Die Untersuchung der Lokalisierung des Zufalls ist durchaus von praktischer Bedeutung. Sie gibt den Hinweis, wo man eventuell korrigierend ansetzen muss, damit ein reales Zufallsexperiment in besonders zuverlässiger Weise Zufallszahlen produziert, die dann z. B. in der Kryptographie verwendet werden können.

Die Antwort darauf, welcher Zufallstyp vorliegt, ist, wie das Vorliegen von Zufall selber, theorieabhängig. Verschiedene Theorien, die den gleichen Erfahrungsbereich beschreiben, können zu verschiedenen Antworten führen. Wie verhält es sich bei unserem Münzwurf mit korrekt geschnippten Münzen? Wir hatten betont, dass man Münzen so fallen lassen kann (vergl. *Abb. 2*), dass die mit „1 oben" präparierte Münze mit Sicherheit auch mit „1 oben" auf einer Platte zur Ruhe kommt. Präparation, Bahn unter äußerem Einfluss des Gravitationsfeldes, Messen durch Ablesen liefern stets das gleiche Ergebnis. Die Newtonsche Theorie erlaubt eine deterministische Berechnung der Bahn der Münze. Wenn die Münze einmal auf ihrer durch die Präparation eindeutig bestimmten Bahn ist, dann läuft die Bewegung deterministisch ab. Worin besteht nach Aussagen dieser Theorie der Unterschied zum Schnippen?

Newtonsche Mechanik

Der Newtonschen Mechanik des Massenpunktes im Gravitationsfeld liegt mathematisch eine Differentialgleichung zugrunde, die Ableitungen des Ortes nach der Zeit enthält. Sie stellt das physikalische Gesetz dar. Die Gesamtheit der Lösungen dieser Differentialgleichung repräsentiert die möglichen Bahnen, die ein Massenpunkt im Gravitationsfeld der Erde durchlaufen kann. Mathematisch formulierte Anfangsbedingungen legen die Lösung der Differentialgleichung eindeutig fest. Physikalisch entspricht den Anfangsbedingungen eine präzise Präparation von Ort und Geschwindigkeit der Masse zu einem Anfangszeitpunkt. Der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung entspricht physikalisch die Festlegung genau einer speziellen Bahn der Masse. Bei exakter Präparation ist die Zukunft des Massenpunktes *determiniert*, das heißt, zu jedem Zeitpunkt liegen seine Bahn und seine Geschwindigkeit eindeutig fest. Die Newtonsche Theorie erlaubt eine deterministische Berechnung der Bahn der fallen gelassenen Münze. In diesem Szenario gibt es keinen Zufall. Was ist anders beim Szenario der geschnippten Münze, wenn man es im Rahmen der Newtonschen Theorie beschreibt?

Durch das immer gleiche Schnippen werden gerade keine gleichen Anfangsbedingungen realisiert. Der reproduzierbare Vorgang des Schnippens stellt keine präzise Präparation der Münzbewegung ihm newtonschen Sinne dar, wie wir das beim Fallenlassen gesehen haben. Das Szenario enthält eine im Präparationsverfahren lokalisierte Undeterminiertheit und damit Zufall.

Allerdings ist das Schnippen kein regelloser Vorgang. Es ist ein Präparationsverfahren besonderer Art. Die relativen Häufigkeiten der Wurfergebnisse liegen fest. Das wird man an den Anfang einer theoretischen Beschreibung dieses speziellen Zufallsexperiments stellen. Durch die Prozedur des immer gleichen Schnippens ist nur eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anfangsbedingungen realisiert. Hierin zeigt sich die Gesetzmäßigkeit, die wir beschreiben müssen. Wir verzichten darauf, den einzelnen präparierenden Vorgang des Schnippens auf Newtonsche Mechanik zurückzuführen. Es wird nicht behauptet, dass das prinzipiell unmöglich ist. Wenn man sich allerdings die Hand vorstellt, die das Schnippen bewirkt, scheint dass kein Erfolg versprechendes Forschungsprogramm zu sein. Es wäre viel zu komplex. In der üblichen theoretischen Formulierung wird nicht versucht, den einzelnen Präparationsvorgang auf das Setzen einer speziellen Anfangsbedingung ihm newtonschen Sinne zurück zu führen. Liegt da nicht eine Erklärungslücke vor?

Ist Zufall eine Erklärungslücke?

Wir müssen zunächst beschreiben, was man in der Physik unter einer Erklärung versteht. Erklärungen sind Antworten auf Warum-Fragen: Das Hempel-Oppenheimer-Schema der deduktiv-gesetzesartigen Erklärung ist allgemein anerkannt. Es besagt, dass eine Erklärung dann geleistet ist, wenn das zu Erklärende logisch korrekt aus allgemeingültigen Gesetzen zusammen mit speziellen Bedingungen (z. B. Anfangsbedingungen) abgeleitet wurde. Für das Ergebnis des Einzelwurfs beim Schnippen (vergl. *Abb.1*) haben wir in diesem Sinn keine Erklärung. Wenn die speziellen Bedingungen erfüllt sind, dass die Bewegung durch Schnippen erzeugt wurde und dass die Münze symmetrisch ist, dann ergibt sich eine deterministische Aussage über die *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, die in diesem Fall nur die beiden Werte w(0) und w(1) hat. Beide Werte sind ½. Das ist ein sehr einfaches Beispiel für eine *statistische Theorie*. Sie bezieht sich, wie alle statistischen Theorien, auf Gesetzmäßigkeiten für relative Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten) und nicht auf einzelne Ereignisse. Statistische Theorien haben aber deshalb keine geringere Erklärungskraft. Sie sind ein anderer, nicht-newtonscher Gesetzestyp. Der Bezug auf eine relative Häufigkeit beruht dabei nicht auf einer Erklärungslücke, die zu schließen wäre. In der Quantentheorie lässt sie sich grundsätzlich nicht schließen. In der klassischen Physik besteht kein Bedarf daran, sie zu schließen. Gesetze, die Aussagen über relative Häufigkeiten machen, sind bereits vollständig. Sie brauchen keine Rückführung auf Gesetze über Einzelereignisse, um für ihren Anwendungsbereich vollgültige Gesetze zu sein. Wir werden in der Quantentheorie sehen, dass in ihrem Fall eine solche Rückführung gar nicht möglich ist.

Wir kommen zurück zu der eingangs gestellten Frage: Wenn 16.000 Münzen, um die Zahlen von oben zu nehmen, gleichzeitig geworfen werden, wie beeinflussen sich die Münzen untereinander so, dass sich insgesamt stets dieselben Resultate w(0) und w(1) ergeben? Da die Würfe gleichzeitig stattfinden sollen, müsste die Wechselwirkung mit den anderen Münzen mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgen. Das widerspricht der Relativitätstheorie. Es gibt keine Wechselwirkung und es muss sie auch nicht geben, um den Münzwurf zu erklären. Die Natur unserer Ausgangsfrage wird deutlich, wenn wir 16.000 Münzen wie in *Abbildung 2* fallen lassen und jeweils das Ergebnis 1 erhalten. Wechselwirkung? Nein, es liegen einfach nur 16.000 gleiche Präparationen vor. Auch beim Schnippen liegen 16.000 gleiche Präparationen vor und es gilt eine statistische Theorie.

Zufall im Quantenbereich

Der Zufall erhält im Quantenbereich eine besondere Qualität.[1] Um das zu verdeutlichen, betrachten wir Experimente mit

1 Einführende Literatur: Jürgen AUDRETSCH, „Verschränkte Welt - Faszination der Quanten", Weinheim 2002. Jürgen AUDRETSCH, „Die sonderbare Welt der Quanten – Eine Einführung", München 2008.

einem einzelnen Photon *(Abb. 5)*. In einer Ein-Photon-Quelle wird mit Drücken eines Knopfes ein einzelnes Photon in den Zustand der vertikalen Polarisation versetzt und emittiert. Dieses Photon tritt, ohne einen äußeren Einfluss erfahren zu haben, in ein spezielles Messgerät ein, das eine Horizontal-Vertikal-Messung durchführt. Es gibt nur die beiden Messergebnisse H und V. Sie werden dadurch angezeigt, dass eine entsprechende Birne aufleuchtet. Bei jedem einzelnen vertikal präpariertenPhoton leuchtet stets die Lampe V auf. Wir drehen das Präparationsgerät um $\alpha = 90°$ (vergl. *Abb. 6*). Es werden dann durch Knopfdruck horizontal polarisierte Photonen erzeugt. In diesem Falle leuchtet stets die Lampe V auf.

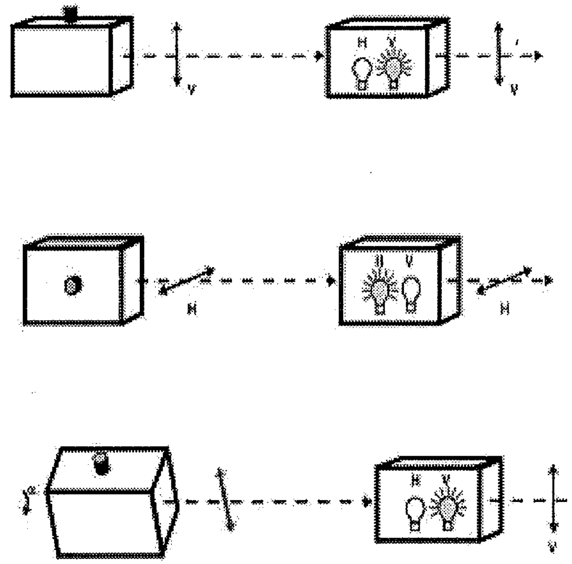

Abb. 6: Experimente mit einzelnen Photonen. V bzw. H bezeichnen vertikale bzw. horizontale Polarisation.

Für unsere Zwecke ist die folgende Situation interessant: Wenn man das Präparationsgerät um $\alpha = 45°$ dreht, dann findet sich ein Ergebnis wie beim Münzwurf mit symmetrischer

Münze. In der Hälfte der Fälle leuchtet die Lampe V auf und in der anderen Hälfte der Fälle die Lampe H:

$$w(V) = ½ \ , \qquad w(H) = ½ \ .$$

Es ergibt sich aber wiederum keine Regelmäßigkeit dafür, wann welche Lampe aufleuchtet. Für andere Winkel als α = 45° beobachten wir eine andere, aber wohl bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Etwas Analoges hatte sich bei Würfen mit einer unsymmetrischen Münze ergeben. Wir können z. B. V mit 0 und H mit 1 identifizieren. Unser Photonen-Experiment ist eine Quelle für Zufallszahlen. Wo ist der Zufall lokalisiert?

Das Szenario hat in der Quantenphysik den gleichen Aufbau wie in der klassischen Physik *(Abb. 7)*. Der Unterschied zum klassischen Zufallsexperiment besteht darin, dass wir für polarisierte Photonen die bereits bestmögliche Präparation verwenden. Anders als beim Schnippen der Münze, zu der es als deterministische Alternative das Fallenlassen der Münze gibt, gibt es zur quantenphysikalischen Präparation keine Alternative. Einflüsse zwischen Präparation und Messung sollen bei unserem Beispiel nicht vorliegen. Die Messung soll die genauest mögliche Quantenmessung sein. Wir betrachten keine unscharfen Quantenmessungen.

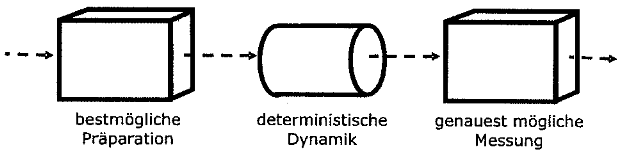

Abb. 7: Das experimentelle Szenario der Quantenphysik.

Wir haben erneut keine Regelmäßigkeit bei der Einzelmessung und feste relative Häufigkeiten bei Sequenzen gefunden. Ist die Struktur des Zufalls im Quantenbereich dieselbe wie beim Münzwurf? Gibt es vielleicht am Ende ein klassisches Objekt, auf dessen unvollständige Präparation der Quantenzufall zurückgeht? Da das Vorliegen von Zufall als fehlende Determiniertheit eine theorieabhängige Aussage ist, müssen wir die Quantentheorie angeben, auf die wir uns beziehen wollen. Wir verwenden zunächst die Standard-Quantentheorie.

Bei unverdrehtem oder um α = 45° verdrehtem Präparationsgerät treten die Messergebnisse V bzw. H mit Sicherheit auf. Erst bei einem anderen Drehwinkel tritt bei demselben Präparationsgerät Regellosigkeit für Einzelereignisse auf. Wir nehmen die ersten beiden Ergebnisse als Indikator dafür, dass kein Präparationszufall vorliegt. In der Standard-Quantentheorie wird das auch so formuliert. Bleibt daher in dieser Theorie nur die Messung als Ort des Zufalls. Tatsächlich werden die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen w(V) und w(H), die sich für die unterschiedlich präparierten Photonen ergeben, in dieser Theorie in Postulaten für den Messprozess fixiert. Nicht die Präparation, sondern der Messprozess ist der nicht deterministische Prozess. Es gibt Versuche, die Standard-Quantentheorie zu erweitern und den Messprozess ebenfalls dynamisch zu beschreiben. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen sollen nicht mehr postuliert, sondern aus einer Mikrostruktur des Messprozesses abgeleitet werden. Diese bisher nicht abgeschlossenen Untersuchungen gehen alle von dem Ansatz aus, dass der quantenmechanische Zufall ein Messzufall ist.

Alternative Quantentheorie

Und wo ist der Zufall in alternativen Quantentheorien lokalisiert? Wir betrachten als ein Beispiel die de Broglie-Bohm-Quantentheorie, ohne allerdings im Einzelnen auf sie genauer eingehen zu können. In dieser Theorie hat die Messung die gleiche Struktur wie in der klassischen Mechanik. Die Quantenteilchen treffen zum Beispiel bei einem Doppelspaltexperiment, nachdem sie auf einer wohlbestimmten Bahn durch einen Spalt geflogen sind, in genau einem Punkt auf dem Schirm hinter dem Spalt auf. Wie in der klassischen Physik liegt in der Messung gerade kein Zufall vor. Diese Alternativtheorie ähnelt in ihrer Struktur einem komplizierten quantenmechanisch gesteuertem Münzwurf. Mit welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung die Teilchen auf verschiedene Bahnen „gesetzt“ werden, ist dabei quantentheoretisch festgelegt. Wir können das als Präparationszufall ansehen. Die quantentheoretische Grundgleichung, also die Schrödinger-Gleichung, beeinflusst dann als quantentheoretisches Führungsfeld die Bahn der Teilchen zwischen Präparation Messung. Dies ist ein deterministischer Prozess. Als Quelle des nicht-deterministischen Verhaltens bleibt daher, wie beim Münzwurf, nur die Präparation.

Der genuine Zufall

Ist der quantentheoretische Zufall ein Präparationszufall der klassischen Physik von der Art, wie der, den wir beim Münzwurf kennen gelernt haben?[2] Betrachten wir noch einmal die Experimente mit einzelnen Photonen. Die Standard-Quantentheorie sagt, dass das um $\alpha = 45°$ gedrehte Präparationsgerät weder Photonen mit vertikaler noch mit horizontaler Polarisation erzeugt. Keine der beiden Eigenschaften liegt vor. Obwohl das so ist, zeigt das Messgerät mit festen relativen Häufigkeiten ½ das Ergebnis H oder V an. Es werden also Eigenschaften angezeigt, die vorher gar nicht vorlagen. Für jeden Drehwinkel α schreibt die Theorie mathematisch den Photonen einen Zustand zu. Die Postulate für den Messprozess erlauben mit seiner Hilfe die Berechnung der relativen Häufigkeiten w(H) und w(V). Das ist eine typisch quantenmechanische Situation. In der klassischen Physik, d. h. für klassische Eigenschaften,

2 Vgl. Fußnote 1.

ist das nicht möglich. Quantentheorie ist keine Theorie der klassischen Physik.

Oder vielleicht doch? Beim Schnippen wurde ja durch die Details des einzelnen Schnippvorgangs festgelegt, ob das Wurfergebnis die 0 oder 1 ist. Ähnliches könnte man sich für Photonen denken. Ein sehr stark vereinfachtes Modell wäre dann beispielsweise: In der um $\alpha = 45°$ gedrehten Position der Quelle werden mit der relativen Häufigkeit ½ Photonen der Polarisation V bzw. H in zufälliger Weise erzeugt. Sie behalten diese Eigenschaft bei. Die Messung stellt sie dann fest. Die Vertreter der Standard-Quantentheorie haben einfach noch nicht gemerkt, dass Photonen wie Objekte der klassischen Physik beschrieben werden können. Die Konzepte der Quantentheorie sind zur Erklärung der Phänomene nicht nötig. Man kann den beobachteten Zufall in gleicher Weise begründen wie bei den Zufallsexperimenten der klassischen Physik.

Es gibt Experimente mit verschränkten Photonen, die zeigen, dass das nicht der Fall ist. Wir können diese Experimente und ihre theoretische Auswertung hier nicht beschreiben. Sie werden in der Literatur nach dem französischen Physiker A. Aspect als Aspect-Experimente bezeichnet. Mit der vom nordirischen Physiker J. S. Bell abgeleiteten Bellschen Ungleichung kann man zeigen, dass bei Photonen keine klassische Situation wie beim Münzwurf oder beim Würfeln vorliegen kann. Hinter der Quantenphysik steckt nicht verborgen eine klassische Physik. Es gibt keine bisher verborgen gebliebene Parameter, von denen man nur verlangen muss, dass sie mit verschiedenen relativen Häufigkeiten auftreten, um den Zufall in der Quantenphysik in Analogie zum Münzwurf zu erfassen.

Bei Münzen findet sich je nach Präparation Determiniertheit, Zufall oder völlige Regellosigkeit. In der Quantenphysik, so wie sie sich in der Standard-Qantentheorie zeigt, gibt es keinen Bereich, in dem die Quantenobjekte sich deterministisch verhalten. Sie zeigen stets Zufall einschließlich der festen Regeln für die relativen Häufigkeiten. Man kann daher den quantentheoretischen Zufall als nicht weiter rückführbaren, absoluten oder *genuinen Zufall* bezeichnen. Die Natur selber erzeugt die Zufallszahlen. Dies ist eine perfekte Prozedur.

Rückblick

Wir betrachten noch einmal den physikalischen Zufall mit Blick auf das Szenario von *Abbildung 5*. Für die gleiche Präparation, z. B. das Schnippen einer Münze oder das Würfeln, ergeben sich verschiedene Messergebnisse. Die Ergebnisse vieler Präparationen werden zu einer Sequenz zusammengefasst. Es werden viele sehr lange Sequenzen betrachtet. Dabei zeigt sich, dass die verschiedenen Messergebnisse in jeder Sequenz mit derselben relativen Häufigkeit auftreten. Das Gesamtszenario ist dann ein Zufallsexperiment und die binär geschriebenen Sequenzen sind Zufallszahlen. Die Bezeichnung als Zufall gilt unter einem Vorbehalt: Es findet sich eine Theorie für die relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten), in der das einzelne Messergebnis aber nicht selber determiniert ist. Sie wird statistische Theorie genannt. Es kann allerdings grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden, dass sich eine andere Theorie finden lässt, die die Ergebnisse in deterministischer Weise begründet. In diesem Sinne ist physikalischer Zufall eine theorieabhängige Aussage.

Münzen kann man auch so werfen, dass das Ergebnis immer gleich ist. Hierzu werden sie beim Abwurf so präpariert, dass immer dieselben Anfangsbedingungen einer speziellen Bahn der Newtonschen Mechanik realisiert werden (vergl. *Abb. 2*). Das Schnippen des Münzzufalls stellt aus der Sicht dieser Theorie eine unvollständige Präparation dar, die aber auf der Ebene der Sequenzen von Würfen Gesetzmäßigkeiten zeigt.

Der Zufall in der Standard-Quantentheorie ist in der Messung lokalisiert. Alternative Quantentheorien geben für ihn andere

Ursprünge (Orte der Nicht-Determiniertheit) an. Die Effekte der Quantenmechanik können nicht auf Zufallsprozesse einer zugrunde liegenden verborgenen klassischen Mechanik zurückgeführt werden. Es gibt einen nicht auf klassische Physik reduzierbaren Quantenbereich. Die Quantenprozesse in diesem Bereich sind in allen Quantentheorien genuine und damit perfekte Zufallsprozesse. Das kann man in technischen Anwendungen ausnutzen.