

# 2

## Blick in die Quantenwelt II: Verschränkung und ihre Folgen

*Jürgen Audretsch*

### 2.1 Einleitung

Im Mittelpunkt des zweiten Teils unseres „Blicks in die Quantenwelt“ stehen zusammengesetzte Quantensysteme. Diese können in verschränkten Zuständen auftreten, die Anlass zu einer Fülle von neuen, typisch quantenphysikalischen Phänomenen sind. Wir greifen einige dieser Effekte heraus, die sowohl von fundamentalem Interesse sind als auch zukünftige Anwendungsmöglichkeiten erkennen lassen.

In Abschnitt 2.2 werden das Konzept der Verschränkung eingeführt und die damit verbundenen EPR-Korrelationen beschrieben. In Abschnitt 2.3 geben wir mit Blick auf die Welcher-Weg-Information eine erste Anwendung, die sich in vertiefter Weise wieder auf den Doppelspalt bezieht. Ein fundamentales Experiment, an dem viele Besonderheiten der Verschränktheit verdeutlicht werden können, ist das Experiment mit zwei verschränkten Photonen, deren Polarisation an getrennten Orten gemessen wird. Wir beschreiben es in Abschnitt 2.4 in der Fassung des Orsay-Experiments und diskutieren daran die experimentelle Antwort auf die Frage, ob die Quantentheorie mit Hilfe von verborgenen Parametern als eine lokale realistische Theorie und damit als ein Teil der klassischen Physik aufgefasst werden kann. Die in Abschnitt 2.5 abgeleitete Bellsche Ungleichung verhindert dies. Am gleichen experimentellen Aufbau wird in Abschnitt 2.6 das Vorgehen in der Quantenkryptographie veranschaulicht. Das No-cloning-Theorem von Abschnitt

2. konkretisiert noch einmal den fundamentalen Unterschied zwischen klassischer Physik und Quantenphysik. Bei Anwendung auf das Orsay-Experiment wird deutlich, wie die Quantentheorie sich selber davor schützt, in Widerspruch zur Speziellen Relativitätstheorie zu geraten. Die bedeutenden Folgen, die die Existenz verschränkter Systeme für eine naturphilosophische Analyse der Quantenwelt hat, werden in Abschnitt 2.8 angesprochen. Das schließt den zweiten Teil der Einführung in die neuen Ergebnisse und aktuellen Probleme der Quantenphysik ab.

## 2.2 Zusammengesetzte Systeme und verschränkte Quantenzustände

Wir wollen zunächst den Vektorformalismus erweitern, den wir in Abschnitt 1.6 kennengelernt haben.<sup>1</sup> Im Folgenden soll ein Quantensystem betrachtet werden, das aus zwei Quantensystemen der bisher besprochenen Art *zusammengesetzt* ist. Wir wollen sie die *Untersysteme* 1 und 2 nennen und den Zustandsvektor des *Gesamtsystems* mit  $|\Phi\rangle$  bezeichnen. Die Untersysteme können zum Beispiel zwei Photonen sein, die in verschiedenen Richtungen davonfliegen, ein Atom und ein Photon usw. Bei mehr als zwei Systemen geht man entsprechend vor. Im Allgemeinen werden bereits verschiedene Freiheitsgrade eines Quantenobjekts als solche Untersysteme aufgefasst. Es könnte sich also auch etwa um den Bahnfreiheitsgrad und den Spinfreiheitsgrad eines Atoms handeln. Voraussetzung ist in allen Fällen, dass an den einzelnen Untersystemen getrennt voneinander Messungen durchgeführt werden können. Wir werden als Beispiel zwei räumlich voneinander getrennte Photonen 1 und 2 betrachten, deren Polarisationszustände wir messen. Die theoretische Beschreibung wollen wir zunächst in allgemeiner Weise formulieren und dazu von Abschnitt 1.6 ausgehen.

Wir beschränken uns wieder auf den Spezialfall, dass bei der Messung an den Untersystemen jeweils nur zwei Ergebnisse auftreten können, nämlich 1 und 2 bei System 1 (siehe Abschnitt 1.6) bzw.  $u$  und  $v$  bei System 2. Wir sind im Folgenden an *Doppelmessungen* und den zugehörigen *Ergebnispaaren* interessiert. Wir übertragen hierzu die Beschreibung des Messprozesses (Dynamik II): System 1 befindet sich nach der Messung an ihm je nach Ergebnis im zugehörigen Eigenzustand  $|1_1\rangle$  oder  $|2_1\rangle$ , System 2 entsprechend im Zustand  $|u_2\rangle$  oder  $|v_2\rangle$ . Der Index gibt jeweils an, an welchem System gemessen wurde. Das Kernsymbol bezeichnet das Messergebnis und den zugehörigen Zustandsvektor. Wie in Abschnitt 1.6 sind wieder alle Zustandsvektoren normiert und stehen paarweise senkrecht aufeinander:  $\langle 1_1|2_1\rangle = 0$ ,  $\langle u_2, v_2\rangle = 0$ .

<sup>1</sup> 1 bezieht sich auf den vorangehenden Artikel „Blick in die Quantenwelt I“. Abschnitt 1.6 bezeichnet also den dortigen Abschnitt 6.

Folgende Kombinationen von Messergebnissen sind möglich:  $(1,u)$ ,  $(1,v)$ ,  $(2,u)$ ,  $(2,v)$ . Für einen bestimmten Zustand  $|\Phi\rangle$  des zusammengesetzten Systems treten die verschiedenen Kombinationen immer mit denselben festen Häufigkeiten auf. Für eine einzelne Doppelmessung ist es jedoch nach wie vor rein zufällig, welche der Kombinationen gemessen wird. Nach der Doppelmessung sind beide Einzelsysteme jeweils in wohlbestimmten Zuständen. Beim Messergebnis  $(1,u)$  sind das die Zustände  $|1_1\rangle$  und  $|u_2\rangle$ . Diesen speziellen Zustand des zusammengesetzten Systems wollen wir mit  $|1_1, u_2\rangle$  bezeichnen. Man schreibt manchmal auch  $|1,u\rangle$  oder  $|1\rangle|u\rangle$ .

Der allgemeine Zustand eines aus zwei Untersystemen zusammengesetzten Systems wird wieder durch *Superposition* der Zustände zu den möglichen Messergebnispaaren gewonnen:

$$|\Phi\rangle = c(1,u)|1_1, u_2\rangle + c(1,v)|1_1, v_2\rangle + c(2,u)|2_1, u_2\rangle + c(2,v)|2_1, v_2\rangle \quad (2.1)$$

Die Vorfaktoren  $c(1,u)$ ,  $c(1,v)$  usw. komplexe Zahlen. Innere Produkte werden „unter-systemweise“ gebildet. Die Ergebnisse werden multipliziert, zum Beispiel  $\langle 1_1, u_2|a_1, b_2\rangle = \langle 1_1|a_1\rangle\langle u_2|b_2\rangle$ .

Es gelten die bekannten Regeln für die Dynamik II. Wenn eine *Messung* am ersten Untersystem das Ergebnis 1 liefert, so wird dieses System in den Zustand  $|1_1\rangle$  überführt und das Gesamtsystem geht dementsprechend in den Zustand

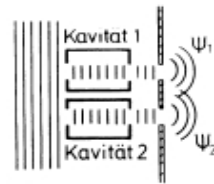
$$|\Phi\rangle \rightarrow |\Phi'\rangle = c'(1,u)|1_1, u_2\rangle + c'(1,v)|1_1, v_2\rangle = |1_1\rangle(c'(1,u)|u_2\rangle + c'(1,v)|v_2\rangle) \quad (2.2)$$

über.<sup>2</sup> Bei der zweiten Gleichung haben wir die Produktregel angewendet. Der Zustand  $|\Phi\rangle$  ist normiert:  $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ . Wiederum ist die Wahrscheinlichkeit, im Zustand  $|\Phi\rangle$  zum Beispiel das Messergebnispaar  $(1,v)$  zu finden, durch  $|c(1,v)|^2$  gegeben. Auch hier bedeutet Wahrscheinlichkeit eine Aussage über die relative Häufigkeit von Messergebnissen von vielen Messungen, die an Systemen im gleichen Zustand  $|\Phi\rangle$  durchgeführt werden. Eine Aussage über die Reihenfolge, in der an den Systemen 1 und 2 gemessen wurde, ist nicht erforderlich.

Wenn sich das System 1 im Zustand  $|a\rangle$  und das System 2 im Zustand  $|b\rangle$  befindet, dann wird man dem zusammengesetzten System den Zustand

$$|\Omega\rangle = |a, b\rangle \quad (2.3)$$

<sup>2</sup> Wegen der Normiertheit von  $|\Phi'\rangle$  gehen die  $c'$  aus den entsprechenden  $c$  von Gleichung (2.1) durch einen gemeinsamen Normierungsfaktor hervor. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist gleich eins.



**Abbildung 2.1.** Wellenzüge der Zustandsfunktion eines Atoms, die vor Erreichen eines Doppelspals durch zwei Kavitäten laufen. Es ist immer nur ein Atom in der Anlage. Das vorher angeregte Atom emittiert ein Photon in eine der Kavitäten und hinterlässt so eine Welcher-Weg-Information. Atom und Photon befinden sich danach in einem verschränkten Zustand.

leere Kavitäten (Hohlräume). Wenn man diese Hohlräume nun richtig dimensioniert, die passende Atomsorte wählt und die Geschwindigkeit der Atome so einstellt, dass sich eine geeignete Aufenthaltsdauer in den Kavitäten ergibt, dann beobachtet man Folgendes: Einzelne Atome, die im angeregten Zustand in einen Hohlraum eintreten, emittieren mit Sicherheit genau ein Photon in diesen Hohlraum hinein, gehen dabei in den Grundzustand über und verlassen, ohne weiter beeinflusst zu werden, die Kavität durch die gegenüberliegende Öffnung. Das Photon bleibt in der Kavität gefangen.

Wir betrachten wieder die Situation, dass sich immer nur ein einzelnes Atom in der ganzen Anlage befindet. Das Atom deponiert also ein Photon entweder in der Kavität 1 oder in der Kavität 2, hinterlässt so eine *Welcher-Weg-Information* und wird schließlich bei Auftreffen auf dem Schirm registriert. Dabei soll aber vom Experimentator in keiner Weise ermittelt werden, in welcher der vorher leeren Kavitäten das Photon deponiert wurde. Betrachtet man wieder die Einschläge vieler Atome auf dem Schirm, so stellt man fest, dass das für den Doppelspalt typische Interferenzbild verloren gegangen ist. Das registrierte Bild stimmt wie in Abschnitt 1.5 mit dem überein, das entsteht, wenn beim Durchtritt des Atoms durch die Anlage jeweils einer der Spalte abgedeckt wurde. Die Wellen  $\Psi_1(x)$  und  $\Psi_2(x)$  haben offenbar nicht miteinander interferiert.

Dass die Erzeugung einer Welcher-Weg-Information und die Interferenz nicht miteinander verträglich sind, lässt sich bereits mit dem wenigen uns zur Verfügung stehenden Wissen über Verschränkung begründen. Die beiden Kavitäten einerseits und das Atom andererseits bilden ein zusammengesetztes System. Das Untersystem „Kavitäten“ befindet sich im Zustand  $|1\rangle$ , wenn das Photon in der Kavität 1 deponiert wurde, und im Zustand  $|2\rangle$ , wenn sich das Photon in der Kavität 2 befindet. Die Vektoren sind normiert:  $\langle 1|1\rangle = 1$ ,  $\langle 2|2\rangle = 1$ . Offenbar kann sich das von dem einen Atom emittierte Photon nur entweder in der Kavität 1 oder in der Kavität 2 befinden. Die entsprechenden Zustandsvektoren stehen daher aufeinander senkrecht:  $\langle 1|2\rangle = 0$ . Darüber hinaus ist bei einer Messung das Auftreten des atomaren Zustandes  $\Psi_1(x)$  fest mit dem Kavitätenzustand  $|1\rangle$  und das Auftreten des Zustandes  $\Psi_2(x)$  mit  $|2\rangle$  verknüpft. Für das Gesamtsystem liegt daher der verschränkte Zustand

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(x)|1\rangle + \Psi_2(x)|2\rangle) \tag{2.5}$$

von.

Wir interessieren uns nur für das Untersystem „Atom“. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreffen im Punkt  $x$  auf dem Schirm ergibt sich als

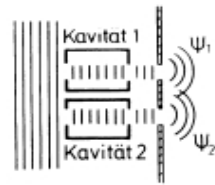
$$P(x) = |\Phi(x)|^2 = \Phi^*(x)\Phi(x) = \frac{1}{2} \{ |\Psi_1(x)|^2 \langle 1|1\rangle + |\Psi_2(x)|^2 \langle 2|2\rangle + \Psi_1^*(x)\Psi_2(x)\langle 1|2\rangle + \Psi_2^*(x)\Psi_1(x)\langle 2|1\rangle \}. \tag{2.6}$$

Wenn man berücksichtigt, dass die Detektorzustände normiert sind und aufeinander senkrecht stehen, folgt daraus, dass die beiden letzten Terme verschwinden. Der Vergleich mit den Gleichungen (1.2) und (1.3) zeigt, dass diese Wahrscheinlichkeitsverteilung gerade die Situation wiedergibt, in der keine Interferenz der Wellen  $\Psi_1(x)$  und  $\Psi_2(x)$  stattfindet.<sup>6</sup>

Das Deponieren des Photons in einer der Kavitäten ist gleichbedeutend damit, dass im Gesamtsystem die Welcher-Weg-Information hinterlassen wird, durch welche Kavität und damit durch welchen Spalt das Atom geflogen ist. Diese Information wird im beschriebenen Fall nicht ausgelesen, aber man könnte sie auslesen. In ihr manifestiert sich ein Teilchencharakter des Quantenobjekts. Damit verknüpft ist das Verschwinden des Interferenzbildes als Ausdruck des Wellencharakters in der theoretischen Beschreibung. Die Interferenzfähigkeit des Untersystems „Atom“ geht bereits durch die Verschränkung mit dem Untersystem „Kavitäten“ verloren. Interferierende Wege werden unterscheidbar. Nur solange die Alternativen „Durchtritt durch Spalt 1“ und „Durchtritt durch Spalt 2“ prinzipiell ununterscheidbar sind, tritt Interferenz auf.

Für die Unterscheidbarkeit ist es daher auch nicht nötig, dass ein Messgerät tatsächlich ermittelt, in welcher Kavität sich das Photon befindet, um so die im System gespeicherte Welcher-Weg-Information auszulesen. Entsprechend ist es nicht notwendig, dass sich der Informationsstand eines menschlichen Beobachters durch das Ablesen eines solchen Messgerätes verbessert. Der Verlust der Interferenzfähigkeit kann also nicht darauf zurückgeführt werden, dass das menschliche Bewusstsein in der Quantenmechanik eine besondere Rolle spielt. Bemerkenswert ist schließlich noch, dass das Interferenzmuster auf dem Schirm verschwindet, obwohl in der obigen Rechnung die beiden Zustände  $\Psi_1(x)$  und  $\Psi_2(x)$  des Atoms hinter dem Doppelspalt gar nicht abgeändert wurden. Beide sind in  $\Phi(x)$  enthalten. Weiterhin war kein Bezug auf die Unbestimmtheitsrelation erforderlich. Die Ursache für den Effekt müssen wir letzten Endes allein in der Verschränkung der beiden Systeme Kavitäten und Atome sehen, wie sie sich im Zustand (2.5) widerspiegelt.

<sup>6</sup> Eine theoretisch befriedigendere Analyse des Effekts verwendet Dichteoperatoren. Das wäre für unseren Rahmen aber zu anspruchsvoll.



**Abbildung 2.1.** Wellenzüge der Zustandsfunktion eines Atoms, die vor Erreichen eines Doppelspalts durch zwei Kavitäten laufen. Es ist immer nur ein Atom in der Anlage. Das vorher angeregte Atom emittiert ein Photon in eine der Kavitäten und hinterlässt so eine Welcher-Weg-Information. Atom und Photon befinden sich danach in einem verschränkten Zustand.

leere Kavitäten (Hohlräume). Wenn man diese Hohlräume nun richtig dimensioniert, die passende Atomsorte wählt und die Geschwindigkeit der Atome so einstellt, dass sich eine geeignete Aufenthaltsdauer in den Kavitäten ergibt, dann beobachtet man Folgendes: Einzelne Atome, die im angeregten Zustand in einen Hohlraum eintreten, emittieren mit Sicherheit genau ein Photon in diesen Hohlraum hinein, gehen dabei in den Grundzustand über und verlassen, ohne weiter beeinflusst zu werden, die Kavität durch die gegenüberliegende Öffnung. Das Photon bleibt in der Kavität gefangen.

Wir betrachten wieder die Situation, dass sich immer nur ein einzelnes Atom in der ganzen Anlage befindet. Das Atom deponiert also ein Photon entweder in der Kavität 1 oder in der Kavität 2, hinterlässt so eine *Welcher-Weg-Information* und wird schließlich bei Auftreffen auf dem Schirm registriert. Dabei soll aber vom Experimentator in keiner Weise ermittelt werden, in welcher der vorher leeren Kavitäten das Photon deponiert wurde. Betrachtet man wieder die Einschläge vieler Atome auf dem Schirm, so stellt man fest, dass das für den Doppelspalt typische Interferenzbild verloren gegangen ist. Das registrierte Bild stimmt wie in Abschnitt 1.5 mit dem überein, das entsteht, wenn beim Durchtritt des Atoms durch die Anlage jeweils einer der Spalte abgedeckt wurde. Die Wellen  $\Psi_1(z)$  und  $\Psi_2(z)$  haben offenbar nicht miteinander interferiert.

Dass die Erzeugung einer Welcher-Weg-Information und die Interferenz nicht miteinander verträglich sind, lässt sich bereits mit dem wenigen uns zur Verfügung stehenden Wissen über Verschränkung begründen. Die beiden Kavitäten einerseits und das Atom andererseits bilden ein zusammengesetztes System. Das Untersystem „Kavitäten“ befindet sich im Zustand  $|1\rangle$ , wenn das Photon in der Kavität 1 deponiert wurde, und im Zustand  $|2\rangle$ , wenn sich das Photon in der Kavität 2 befindet. Die Vektoren sind normiert:  $\langle 1|1\rangle = 1$ ,  $\langle 2|2\rangle = 1$ . Offenbar kann sich das von dem einen Atom emittierte Photon nur entweder in der Kavität 1 oder in der Kavität 2 befinden. Die entsprechenden Zustandsvektoren stehen daher aufeinander senkrecht:  $\langle 1|2\rangle = 0$ . Darüber hinaus ist bei einer Messung das Auftreten des atomaren Zustandes  $\Psi_1(z)$  fest mit dem Kavitätenzustand  $|1\rangle$  und das Auftreten des Zustandes  $\Psi_2(z)$  mit  $|2\rangle$  verknüpft. Für das Gesamtsystem liegt daher der verschränkte Zustand

$$|\Phi(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_1(z)\rangle|1\rangle + |\Psi_2(z)\rangle|2\rangle) \quad (2.5)$$

vor.

Wir interessieren uns nur für das Untersystem „Atom“. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreffen im Punkt  $z$  auf dem Schirm ergibt sich als

$$P(z) = |\Phi(z)|^2 = \Phi^*(z)\Phi(z) = \frac{1}{2} \left\{ |\Psi_1(z)|^2 \langle 1|1\rangle + |\Psi_2(z)|^2 \langle 2|2\rangle + \Psi_1^*(z)\Psi_2(z)\langle 1|2\rangle + \Psi_2^*(z)\Psi_1(z)\langle 2|1\rangle \right\}. \quad (2.6)$$

Wenn man berücksichtigt, dass die Detektorzustände normiert sind und aufeinander senkrecht stehen, folgt daraus, dass die beiden letzten Terme verschwinden. Der Vergleich mit den Gleichungen (1.2) und (1.3) zeigt, dass diese Wahrscheinlichkeitsverteilung gerade die Situation wiedergibt, in der keine Interferenz der Wellen  $\Psi_1(z)$  und  $\Psi_2(z)$  stattfindet.<sup>6</sup>

Das Deponieren des Photons in einer der Kavitäten ist gleichbedeutend damit, dass im Gesamtsystem die Welcher-Weg-Information hinterlassen wird, durch welche Kavität und damit durch welchen Spalt das Atom geflogen ist. Diese Information wird im beschriebenen Fall nicht ausgelesen, aber man könnte sie auslesen. In ihr manifestiert sich ein Teilchencharakter des Quantenobjekts. Damit verknüpft ist das Verschwinden des Interferenzbildes als Ausdruck des Wellencharakters in der theoretischen Beschreibung. Die Interferenzfähigkeit des Untersystems „Atom“ geht bereits durch die Verschränkung mit dem Untersystem „Kavitäten“ verloren. Interferierende Wege werden unterscheidbar. Nur solange die Alternativen „Durchtritt durch Spalt 1“ und „Durchtritt durch Spalt 2“ prinzipiell ununterscheidbar sind, tritt Interferenz auf.

Für die Unterscheidbarkeit ist es daher auch nicht nötig, dass ein Messgerät tatsächlich ermittelt, in welcher Kavität sich das Photon befindet, um so die im System gespeicherte Welcher-Weg-Information auszulesen. Entsprechend ist es nicht notwendig, dass sich der Informationsstand eines menschlichen Beobachters durch das Ablesen eines solchen Messgerätes verbessert. Der Verlust der Interferenzfähigkeit kann also nicht darauf zurückgeführt werden, dass das menschliche Bewusstsein in der Quantenmechanik eine besondere Rolle spielt. Bemerkenswert ist schließlich noch, dass das Interferenzmuster auf dem Schirm verschwindet, obwohl in der obigen Rechnung die beiden Zustände  $\Psi_1(z)$  und  $\Psi_2(z)$  des Atoms hinter dem Doppelspalt gar nicht abgeändert wurden. Beide sind in  $|\Phi(z)\rangle$  enthalten. Weiterhin war kein Bezug auf die Unbestimmtheitsrelation erforderlich. Die Ursache für den Effekt müssen wir letzten Endes allein in der Verschränkung der beiden Systeme Kavitäten und Atome sehen, wie sie sich im Zustand (2.5) widerspiegelt.

<sup>6</sup> Eine theoretisch befriedigendere Analyse des Effekts verwendet Dichteoperatoren. Das wäre für unseren Rahmen aber zu anspruchsvoll.

Im Folgenden wollen wir die EPR-Korrelationen an einem konkreten Beispiel weiter veranschaulichen.

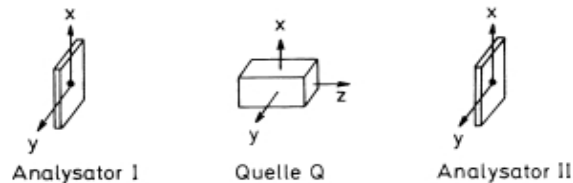
## 2.4 Verborgene Parameter: Alles nur klassische Physik?

Wir betrachten den folgenden experimentellen Aufbau (vgl. Abbildung 2.2): Geeignet angeregte Kalziumatome gehen in einer Kaskade von zwei Schritten in den Grundzustand über. Da die Lebensdauer des mittleren Niveaus außerordentlich kurz ist, handelt es sich gewissermaßen um einen „einzigsten“ Prozess. Es wird dabei ein verschränktes Photonenpaar (Gesamtsystem) emittiert. Die einzelnen Photonen des Paares (Untersysteme) haben verschiedene Frequenzen und fliegen in positiver bzw. negativer  $z$ -Richtung davon. Sie treffen auf die parallel ausgerichteten Analysatoren I und II, in der die Polarisierungen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung gemessen werden. Die Abstände der Analysatoren von der Quelle  $Q$  sind für die folgenden Überlegungen nicht wichtig. Sie können insbesondere unterschiedlich sein. Man stellt fest, dass mit gleicher Häufigkeit immer nur die Messwertpaare  $(x,x)$  oder  $(y,y)$  registriert werden.  $x$  und  $y$  bezeichnen die jeweils gemessene Polarisationsrichtung. Der verschränkte Zustand dieses *2-Photonen-Systems* hat daher die Gestalt

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1, x_2\rangle + |y_1, y_2\rangle). \quad (2.7)$$

Das auf Analysator I bzw. II zufliegende Photon wird dabei mit dem Index 1 bzw. 2 gekennzeichnet. Wir werden künftig die Indizes weglassen. Der Bezug auf I und II ergibt sich aus der Reihenfolge.

Das hier beschriebene Experiment ist für die Diskussion der Verschränkung zusammengesetzter Quantensysteme und die Veranschaulichung ihrer Eigenschaften von fundamentaler Bedeutung. Auf der Grundlage von Erfahrungen, die aus Vorläufer-Experimenten



**Abbildung 2.2.** In der Quelle  $Q$  werden zwei verschränkte Photonen erzeugt. In negativer bzw. positiver  $z$ -Richtung fliegen die Photonen auf die parallel ausgerichteten Analysatoren in I bzw. II zu, die ihre Polarisationsrichtung messen.

ten stammten, wurde es 1982 von A. Aspect und Mitarbeitern in Orsay durchgeführt (Aspect (1981), Aspect (1982)). Es wird daher das *Orsay-Experiment* genannt. Es gibt heute auch andere Möglichkeiten, verschränkte Photonenpaare zu erzeugen und mit ihnen zu experimentieren.

Immer, wenn bei einem einzelnen Photonenpaar in I eine bestimmte Polarisationsrichtung gemessen wird (zum Beispiel  $x$ ), dann wird die gleiche Richtung auch in II gemessen (ebenfalls  $x$ ). Diese – wie wir wissen, sichere – Prognose kann ein Beobachter in I abgeben, unabhängig davon, wie weit I und II voneinander entfernt sind. Es liegt also eine starke Korrelation vor. Ist das ein neuer verblüffender quantenmechanischer Effekt, der nur bei verschränkten Quantenobjekten beobachtet werden kann? Ganz und gar nicht! Analoge Erfahrungen machen wir ständig im Bereich der Alltagsphysik. Wir geben ein Beispiel: Jemand besitzt ein Paar Handschuhe und nimmt beim Verlassen des Hauses versehentlich nur einen Handschuh mit. Wenn er dann – wie weit er sich auch immer von zu Hause entfernt haben mag – in die Tasche greift und einen linken Handschuh findet, weiß er sofort, dass sich der rechte Handschuh zu Hause befindet und umgekehrt. Wenn wir nun noch annehmen, dass er gleich häufig den linken wie den rechten Handschuh vergisst, dann haben wir – allerdings nur was diese Beobachtungen anbelangt – eine Situation wie beim Zwei-Photonen-System im Zustand  $|\Phi\rangle$  von Gleichung (2.7) in der Versuchsanordnung aus Abbildung 2.2.

Wenn der Leser den Verdacht nicht schon vorher hatte, wird er sich spätestens an dieser Stelle fragen, ob nicht hinter allen Effekten der Quantenmechanik einfach die klassische Physik steckt, ob also die Quantenobjekte letzten Endes nicht doch nur klassisch beschreibbare Eigenschaften haben, durch die ihr Verhalten vollkommen erklärt werden kann. Das ist zugleich die Frage, ob die Quantenmechanik auf die klassische Mechanik zurückgeführt werden kann. Vielleicht haben wir uns hierfür bisher nur nicht genug Mühe gemacht oder etwas übersehen? In Abschnitt 1.4 haben wir diese Vermutung ohne nähere Begründung zurückgewiesen. Mit Hilfe verschränkter Systeme lässt sie sich aber experimentell widerlegen.

Zur Erklärung der Messergebnisse im Orsay-Experiment könnte in diesem Zusammenhang ja vielleicht schon die folgende Annahme ausreichen: Ein Photon hat schon vor der Messung die wohlbestimmte Eigenschaft „Polarisationsrichtung“. Das gilt auch für die einzelnen Photonen von Photonenpaaren. Unsere Quelle für die Photonenpaare ist so beschaffen, dass sie immer nur Paare produziert, die entweder gemeinsam die Polarisationsrichtung  $x$  oder gemeinsam die Polarisationsrichtung  $y$  haben. Welche Richtung im Einzelprozess erzeugt wird, ist zufällig, aber die Häufigkeit ist jeweils gleich 50 %.

Worauf kann man zurückgreifen, wenn man die Unvermeidbarkeit der Quantenmechanik belegen will? Nichts liegt näher als den Messprozess ins Spiel zu bringen, hinsichtlich dessen sich – wie wir gesehen haben – klassische Physik und Quantenphysik funda-

<sup>1</sup>Siehe auch den Beitrag von H. Weinfurter (Kap. 6) zu diesem Buch. Eine Realisierung der Verschränkung von Photonen mit Atomen (Quantenschnittstelle) wird im Artikel von G. Rempe (Kap. 5) beschrieben.

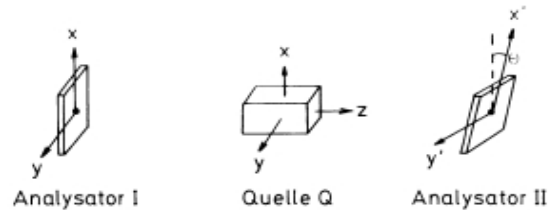


Abbildung 2.3. Versuchsaufbau wie in Abbildung 2, aber mit einem um den Winkel  $\Theta$  gedrehten Analysator in II.

mental unterscheiden. Hierzu drehen wir den Analysator in II um den Winkel  $\Theta$  wie in Abbildung 2.3 geschehen.

Die neuen Richtungen bezeichnen wir mit  $x'$  und  $y'$ . Wenn dann im Analysator I die Polarisationsrichtung  $x$  gemessen wird, hat das Photon in II gemäß Gleichung (2.7) ebenfalls die Polarisationsrichtung  $x$ . Dies ist eine bemerkenswerte Folge des Quantenmessprozesses, die unabhängig vom Abstand der Photonen gilt. Schließlich wird im Analysator II nach den Regeln der Quantenmechanik entweder die Polarisationsrichtung  $x'$  oder  $y'$  gemessen. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich wieder über die Quadrate der Projektionen des Vektors  $|x\rangle$  auf die Vektoren  $|x'\rangle$  bzw.  $|y'\rangle$  bestimmen (Abbildung 2.4). Die Wahrscheinlichkeit, die Polarisation  $x'$  zu finden, ist demnach  $\cos^2\Theta$ . Dies trifft zu unter der Voraussetzung, dass in I die Richtung  $x$  gefunden wird, also in der Hälfte aller Fälle. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Messwertepaares  $(x, x')$  insgesamt durch  $w(x, x') = \frac{1}{2} \cos^2\Theta$  gegeben. Je nachdem, welche Richtung in I gemessen wird, gibt es vier Messwertpaare, deren Wahrscheinlichkeiten  $w(x, x')$ ,  $w(x, y')$ ,  $w(y, x')$  und  $w(y, y')$  sich mit Hilfe von Abbildung 2.4 leicht als Funktion von  $\Theta$  bestimmen lassen. Im Experiment werden diese im Rahmen der Quantentheorie berechneten Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten bestätigt.

Falls der Leser bisher meinte, alles sei klassische Physik, haben wir ihn damit überzeugt? Wohl kaum, denn er wird darauf bestehen, dass nach wie vor die einzelnen Photonen der

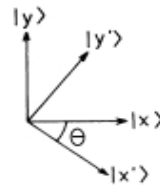


Abbildung 2.4. Gegeneinander verdrehte Analysatoren.

Photonenpaare mit jeweils wohlbestimmten Polarisierungen erzeugt werden. Nur wird er jetzt bei den einzelnen Photonenteilen zum Beispiel ganz unterschiedliche Polarisierungen zulassen und für die verschiedenen Kombinationen verschiedene Häufigkeiten angeben. Kann er damit die experimentellen Resultate reproduzieren?

Bevor wir diese Frage beantworten, wollen wir zunächst die Einstellung des Gegners der Quantentheorie noch näher charakterisieren: Er zweifelt keines der Messergebnisse an und er bestreitet auch nicht, dass die Quantentheorie die Messergebnisse korrekt prognostiziert. Er behauptet nur, dass dies im Rahmen einer klassischen Physik ebenfalls möglich ist. Dabei möchte er folgende Elemente einer klassischen Theorie für die Phänomene im Quantenbereich „gerettet“ sehen: erstens den *Realismus* (die einzelnen Quantenobjekte – auch die in einem zusammengesetzten System – besitzen die Eigenschaften, die sich in der Messung zeigen, unabhängig von der Messung, also bereits vorher), und zweitens die *Lokalität* (die räumlich getrennten Quantenobjekte besitzen alle ihre Eigenschaften unabhängig voneinander).<sup>8</sup> Eine physikalische Theorie, die das erfüllt, wird *lokale realistische Theorie* genannt.

Unser Zweifler ist davon überzeugt, dass es eine, verglichen mit der Quantentheorie, detailliertere Beschreibung der Natur gibt, bei der alle Vorhersagen für Einzelmessergebnisse wohlbestimmt sind. Dass wir bisher im Quantenbereich nur Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen konnten, liegt dann daran, dass wir die Quantenobjekte in unserer theoretischen Beschreibung noch nicht vollständig erfasst haben. Die detailliertere klassische Beschreibung wird zusätzliche Daten erfordern. Sie stehen uns bisher, zum Beispiel weil spezifische Messtechniken fehlen, nur noch nicht zur Verfügung. Diese hypothetischen zusätzlichen Größen, die nach dieser Vorstellung in der Natur tatsächlich vorhanden sind und eine lokale realistische Beschreibung ermöglichen, heißen *verborgene Parameter*. Der Anstoß dazu, verborgene Parameter zu betrachten, ging von dem berühmten Einstein-Podolsky-Rosen-Gedankenexperiment (Einstein (1935)) aus. Die Autoren stellten die Frage: „Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?“ und drückten damit ihre Unzufriedenheit mit der Wahrscheinlichkeitsstruktur der Quantentheorie und dem von ihr entworfenen Bild von der Wirklichkeit aus.<sup>9</sup> Wohl selten in der Geschichte der Physik hat eine Arbeit, die ein konzeptionelles Dilemma beschreibt, in so innovativer Weise neue Entwicklungen in eben der Theorie angestoßen, die sie in Frage stellen wollte.

Allerdings ist es gerade das Wesen dieser verborgenen Parameter, dass wir sie im Einzelnen bisher nicht kennen. Das eröffnet einen großen Freiraum für die Theoriebildung mit vielen Ausweichmöglichkeiten. Der Behauptung, alles sei nichts als klassische Physik, scheint auf den ersten Blick nicht widersprochen werden zu können. Tatsächlich ist dies doch möglich. Mit einer lokalen realistischen Theorie – wie auch immer sie im Einzelnen for-

<sup>8</sup> Diese Forderung, die sich gegen die Vorstellung einer Verschränkung der Untersysteme wendet, sollte man besser *Separabilität* nennen. Das Gesamtsystem zerfällt in voneinander unabhängige Untersysteme. Der Fall, dass die Untersysteme auch noch räumlich voneinander getrennt sind, ist nur ein Spezialfall.

<sup>9</sup> Weitere Einzelheiten und die Schilderung der historischen Situation finden sich im nachfolgenden Artikel von C. Held (Kap. 3).

gebildet. Damit liegt auch der Korrelationskoeffizient  $S^{\text{VP}}(\Theta)$  in Gleichung (2.9) fest.

Die rechnerische Auswertung<sup>10</sup> ergibt im Einzelnen die für alle Winkel  $\Theta$  gültige *Bellsche Ungleichung*<sup>11</sup>

$$|S^{\text{VP}}(\Theta)| \leq 2. \quad (2.12)$$

Sie ist keine Gleichung der Quantentheorie, sondern – wie die Ableitung zeigt – eine folgenreiche Relation der klassischen Physik. Mit Blick auf das schon erwähnte experimentelle Ergebnis  $S_{\text{max}}^{\text{Exp}}$ , das deutlich über 2 liegt, kommen wir nämlich zu einem bemerkenswerten Resultat: Die Messergebnisse verletzen die Bellsche Ungleichung (2.12), daher sind die Vorhersagen lokal realistischer Theorien falsch. Dieser Versuch, eine klassische Theorie für den Quantenbereich zu formulieren, ist damit experimentell widerlegt.<sup>12</sup>

Bleibt noch nachzutragen, dass sich, ausgehend vom Zustand (2.7), auch nach den Regeln der Quantentheorie die Kurve  $S^{\text{QM}}(\Theta)$  berechnen lässt. Mit der Bestimmung von  $u(x, x')$  im vorigen Abschnitt haben wir schon einen ersten Schritt hierzu getan.  $S^{\text{QM}}(\Theta)$  stimmt sehr gut mit der experimentellen Kurve  $S^{\text{Exp}}(\Theta)$  überein.<sup>13</sup> Die Verschränkung macht es wieder einmal möglich. Die Korrelationen in der Quantentheorie können größer als in der klassischen Physik sein. Wer hätte auch ein anderes Ergebnis erwartet? Selbst unser Gegner der Quantentheorie hatte ja nicht bestritten, dass diese Theorie die experimentellen Ergebnisse korrekt prognostiziert. Er war nur auf der Grundlage seiner Kategorien für Theorienbewertung unzufrieden mit ihr, hielt sie unter anderem für unvollständig und wollte die Messergebnisse im Quantenbereich mit einer klassischen Alternativtheorie begründen. Dieser Versuch ist wegen der Allgemeinheit der Ableitung von Gleichung (2.12)

<sup>10</sup> Die Rechnung ist einfach. Man substituiert in Gleichung (2.9) den Ausdruck (2.11) und fasst geeignet zusammen:

$$S^{\text{VP}} = \int [s_2(x'')][s_2(x') + s_2(x''')] + s_2(x)[s_2(x') - s_2(x''')] \rho(\lambda) d\lambda.$$

Wenn man berücksichtigt, dass  $s_2$  gemäß Gleichung (7c) nur die Werte +1 oder -1 annehmen kann, und die verschiedenen Kombinationen durchspielt, dann sieht man leicht, dass der Betrag des Integranden stets kleiner oder gleich 2 ist:  $|\{\dots\}| \leq 2$ . Hiermit und mit der Positivität der Wahrscheinlichkeitsdichte ( $\rho \geq 0$ ) folgt

$$|S^{\text{VP}}| = \left| \int \{\dots\} \rho(\lambda) d\lambda \right| \leq \int |\{\dots\}| \rho(\lambda) d\lambda = \int |\{\dots\}| \rho(\lambda) d\lambda \leq 2 \int \rho(\lambda) d\lambda = 2.$$

Für die letzte Gleichung haben wir die Normiertheit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$  verwendet.

<sup>11</sup> Die Bellsche Ungleichung wurde 1964 von J. S. Bell aufgestellt (Bell (1964)). Die hier vorgestellte Variante stammt von J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony und R. A. Holt (Clauser (1969)). Es gibt weitere Varianten. Siehe auch den Beitrag von H. Weinfurter in diesem Buch.

<sup>12</sup> Es bleibt selbstverständlich die Möglichkeit, in eine nichtlokale Alternativtheorie zur Quantentheorie auszuweichen. Eine solche Theorie mit verborgenen Parametern ist die Bohmsche Theorie (Bohm (1952)).

<sup>13</sup> Eine didaktische Aufarbeitung des ganzen Themenkreises und weitere Literatur finden sich zum Beispiel in Audretsch (1991).

für alle lokalen realistischen Theorien und damit gleich für eine ganze Klasse solcher Alternativtheorien gescheitert. Man könnte es noch mit nichtlokalen und trotzdem realistischen Theorien versuchen. Nur würden diese uns als noch weitaus paradoxer erscheinen als selbst die Quantentheorie (auf den ersten Blick zumindest). Bleiben wir also bei der sehr gut ausgebauten und seit vielen Jahrzehnten immer wieder exzellent bestätigten Quantentheorie.

Mit aller Vorsicht allerdings. Wir haben oben mit dem Orsay-Experiment ein Labor-experiment aus dem Jahre 1982 geschildert. Heute kann die Wirkung von Quantenkorrelationen über eine Entfernung von mehr als zehn Kilometern demonstriert werden (Tittel (1998)). Es wurden schon bald Schwachpunkte beim Orsay-Experiment entdeckt, die den Ausschluss der lokalen realistischen Theorie noch nicht völlig zwingend machen. Daher ist in der Zwischenzeit weiter an der Verfeinerung des Experiments gearbeitet worden, und andere Experimente wurden vorgeschlagen, um die „Schlupflöcher“ zu schließen. So kann man durch den Versuchsaufbau ausschließen, dass eine Information über die eingestellte Polarisation zwischen den Detektoren – in welcher Weise auch immer und selbst mit Überlichtgeschwindigkeit – übertragen werden kann. Ein weiteres Schlupfloch besteht darin, dass die Detektoren nicht mit einer hundertprozentigen Effizienz arbeiten. Verschiedene experimentelle Gruppen arbeiten an diesem Problem mit großem Erfolg. Der nächste Schritt dürfte dann sein, verschränkte Atome oder Ionen in Ionenfallen statt Photonen zu verwenden. Wie immer kann und muss die experimentelle Genauigkeit, mit der eine theoretische Aussage bestätigt wird, weiter verbessert werden. Die oben gezogene Schlussfolgerung darf aber schon heute als experimentell außerordentlich gut gesichert gelten.

Damit soll aber nicht gesagt sein, dass es unmöglich ist, mit neuen experimentellen Techniken oder Beobachtungsmethoden ganz neue Erfahrungsbereiche zu erschließen, in denen eine quantentheoretische Beschreibung der bisherigen Art versagt. Sollte das eines Tages gelingen, so hätte man einen Bereich außerhalb des Quantenbereichs gefunden, der eine neue Theorie erfordert. Dass diese dann eine lokale realistische Theorie sein könnte, erwartet allerdings niemand. In der Zwischenzeit wollen wir versuchen, unser Verständnis der Quantentheorie weiter zu vertiefen. Hierzu gehen wir zu einem neuen Anwendungsbeispiel über.

## 2.6 Der Lauscher wird entdeckt: Quanten-Kryptographie

Wir können direkt an der im vorigen Kapitel beschriebenen Anordnung demonstrieren, wie mit Hilfe verschränkter Systeme geheime Botschaften übertragen werden können, ohne dass ein „Lauscher“ irgendeine Möglichkeit hat, sie „abzuhören“ (Ekert (1991)). Die Quantentheorie eröffnet für die *Kryptographie* ganz neue Möglichkeiten. Wieder einmal beruht das ganz wesentlich darauf, dass die Messung an Quantenobjekten – anders als in

gebildet. Damit liegt auch der Korrelationskoeffizient  $S^{\text{VP}}(\Theta)$  in Gleichung (2.9) fest.

Die technische Auswertung<sup>10</sup> ergibt im Einzelnen die für alle Winkel  $\Theta$  gültige *Bellsche Ungleichung*<sup>11</sup>

$$\left| S^{\text{VP}}(\Theta) \right| \leq 2. \quad (2.12)$$

Sie ist keine Gleichung der Quantentheorie, sondern – wie die Ableitung zeigt – eine folgenreiche Relation der klassischen Physik. Mit Blick auf das schon erwähnte experimentelle Ergebnis  $S_{\text{max}}^{\text{Exp}}$ , das deutlich über 2 liegt, kommen wir nämlich zu einem bemerkenswerten Resultat: Die Messergebnisse verletzen die Bellsche Ungleichung (2.12), daher sind die Vorhersagen lokal realistischer Theorien falsch. Dieser Versuch, eine klassische Theorie für den Quantenbereich zu formulieren, ist damit experimentell widerlegt.<sup>12</sup>

Bleibt noch nachzutragen, dass sich, ausgehend vom Zustand (2.7), auch nach den Regeln der Quantentheorie die Kurve  $S^{\text{QM}}(\Theta)$  berechnen lässt. Mit der Bestimmung von  $w(x, x')$  im vorigen Abschnitt haben wir schon einen ersten Schritt hierzu getan.  $S^{\text{QM}}(\Theta)$  stimmt sehr gut mit der experimentellen Kurve  $S^{\text{Exp}}(\Theta)$  überein.<sup>13</sup> Die Verschränkung macht es wieder einmal möglich. Die Korrelationen in der Quantentheorie können größer als in der klassischen Physik sein. Wer hätte auch ein anderes Ergebnis erwartet? Selbst unser Gegner der Quantentheorie hatte ja nicht bestritten, dass diese Theorie die experimentellen Ergebnisse korrekt prognostiziert. Er war nur auf der Grundlage seiner Kategorien für Theorienbewertung unzufrieden mit ihr, hielt sie unter anderem für unvollständig und wollte die Messergebnisse im Quantenbereich mit einer klassischen Alternativtheorie begründen. Dieser Versuch ist wegen der Allgemeinheit der Ableitung von Gleichung (2.12)

<sup>10</sup> Die Rechnung ist einfach. Man substituiert in Gleichung (2.9) den Ausdruck (2.11) und fasst geeignet zusammen:

$$S^{\text{VP}} = \int s_2(x'') [s_2(x') + s_2(x'')] + s_2(x) [s_2(x') - s_2(x'')] \rho(x, \lambda) d\lambda.$$

Wenn man berücksichtigt, dass  $s_2$  gemäß Gleichung (7c) nur die Werte +1 oder -1 annehmen kann, und die verschiedenen Kombinationen durchspielt, dann sieht man leicht, dass der Betrag des Integranden stets kleiner oder gleich 2 ist:  $|\dots| \leq 2$ . Hiermit und mit der Positivität der Wahrscheinlichkeitsdichte ( $\rho \geq 0$ ) folgt

$$\left| S^{\text{VP}} \right| = \left| \int \{\dots\} \rho(x, \lambda) d\lambda \right| \leq \int |\{\dots\}| \rho(x, \lambda) d\lambda = \int |\{\dots\}| \rho(x, \lambda) d\lambda \leq 2 \int \rho(x, \lambda) d\lambda = 2.$$

Für die letzte Gleichung haben wir die Normiertheit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\int \rho(x, \lambda) d\lambda = 1$  verwendet.

<sup>11</sup> Die Bellsche Ungleichung wurde 1964 von J. S. Bell aufgestellt (Bell (1964)). Die hier vorgestellte Variante stammt von J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony und R. A. Holt (Clauser (1969)). Es gibt weitere Varianten. Siehe auch den Beitrag von H. Weinfurter in diesem Buch.

<sup>12</sup> Es bleibt selbstverständlich die Möglichkeit, in eine nichtlokale Alternativtheorie zur Quantentheorie auszuweichen. Eine solche Theorie mit verborgenen Parametern ist die Bohmsche Theorie (Bohm (1952)).

<sup>13</sup> Eine didaktische Aufarbeitung des ganzen Themenkreises und weitere Literatur finden sich zum Beispiel in Audretsch (1991).

für alle lokalen realistischen Theorien und damit gleich für eine ganze Klasse solcher Alternativtheorien gescheitert. Man könnte es noch mit nichtlokalen und trotzdem realistischen Theorien versuchen. Nur würden diese uns als noch weitaus paradoxer erscheinen als selbst die Quantentheorie (auf den ersten Blick zumindest). Bleiben wir also bei der sehr gut ausgebauten und seit vielen Jahrzehnten immer wieder exzellent bestätigten Quantentheorie.

Mit aller Vorsicht allerdings. Wir haben oben mit dem Orsay-Experiment ein Labor-experiment aus dem Jahre 1982 geschildert. Heute kann die Wirkung von Quantenkorrelationen über eine Entfernung von mehr als zehn Kilometern demonstriert werden (Tittel (1998)). Es wurden schon bald Schwachpunkte beim Orsay-Experiment entdeckt, die den Ausschluss der lokalen realistischen Theorie noch nicht völlig zwingend machen. Daher ist in der Zwischenzeit weiter an der Verfeinerung des Experiments gearbeitet worden, und andere Experimente wurden vorgeschlagen, um die „Schlupflöcher“ zu schließen. So kann man durch den Versuchsaufbau ausschließen, dass eine Information über die eingestellte Polarisation zwischen den Detektoren – in welcher Weise auch immer und selbst mit Überlichtgeschwindigkeit – übertragen werden kann. Ein weiteres Schlupfloch besteht darin, dass die Detektoren nicht mit einer hundertprozentigen Effizienz arbeiten. Verschiedene experimentelle Gruppen arbeiten an diesem Problem mit großem Erfolg. Der nächste Schritt dürfte dann sein, verschränkte Atome oder Ionen in Ionenfallen statt Photonen zu verwenden. Wie immer kann und muss die experimentelle Genauigkeit, mit der eine theoretische Aussage bestätigt wird, weiter verbessert werden. Die oben gezogene Schlussfolgerung darf aber schon heute als experimentell außerordentlich gut gesichert gelten.

Damit soll aber nicht gesagt sein, dass es unmöglich ist, mit neuen experimentellen Techniken oder Beobachtungsmethoden ganz neue Erfahrungsbereiche zu erschließen, in denen eine quantentheoretische Beschreibung der bisherigen Art versagt. Sollte das eines Tages gelingen, so hätte man einen Bereich außerhalb des Quantenbereichs gefunden, der eine neue Theorie erfordert. Dass diese dann eine lokale realistische Theorie sein könnte, erwartet allerdings niemand. In der Zwischenzeit wollen wir versuchen, unser Verständnis der Quantentheorie weiter zu vertiefen. Hierzu gehen wir zu einem neuen Anwendungsbeispiel über.

## 2.6 Der Lauscher wird entdeckt: Quanten-Kryptographie

Wir können direkt an der im vorigen Kapitel beschriebenen Anordnung demonstrieren, wie mit Hilfe verschränkter Systeme geheime Botschaften übertragen werden können, ohne dass ein „Lauscher“ irgendeine Möglichkeit hat, sie „abzuhören“ (Ekert (1991)). Die Quantentheorie eröffnet für die *Kryptographie* ganz neue Möglichkeiten. Wieder einmal beruht das ganz wesentlich darauf, dass die Messung an Quantenobjekten – anders als in



der klassischen Physik – die Zustände im allgemeinen ändert. Klassisch gespeicherte Information erlaubt störungsfreies Ablesen oder Abhören. Wenn man hingegen versucht, die in einem Quantenzustand gespeicherte Information durch Messung „abzuhören“, so wird das System in einen neuen Zustand überführt. Der Lauscher hinterlässt eine Spur. Das Abhören kann entdeckt werden.

Wenn ein Lauscher zum Beispiel versucht, den Polarisationszustand von Photon 1 oder Photon 2 auf dem Weg nach I oder II zu messen, so wird er im Allgemeinen, auch wenn das entsprechende Photon dabei nicht zerstört wird, dessen Polarisation abändern. Es liegt nach diesem messenden Eingriff für das Gesamtsystem nicht mehr der verschränkte Zustand (Gleichung (2.7)) vor, sondern statt dessen ein Produktzustand. Wenn man danach in I und II die oben beschriebenen Messungen zur Bestimmung von  $S(\Theta)$  vornimmt, ergibt sich auch nicht mehr der quantentheoretische Maximalwert  $S_{\max}^{\text{QM}}$ . Die Korrelationen werden verändert und der Lauscher ist entdeckt. Die Verwendung des Zwei-Photonen-Systems aus dem vorigen Abschnitt hat noch einen weiteren Vorteil. Wie wir sehen werden, lässt sich mit ihm, ausgehend von der Photonenquelle, ein völlig zufällig entstandener Schlüssel nach I und II übertragen. Wie lassen sich diese Elemente zu einem sicheren Verschlüsselungssystem zusammenfügen?

Wir beschreiben zunächst eines der möglichen *Verschlüsselungsverfahren*. Wir nehmen an, dass der verschlüsselte Text in Bits geschrieben ist, also aus einer Abfolge von Zahlen 0 und 1 besteht. Der Schlüssel ist ebenfalls eine Sequenz von Zahlen 0 und 1. Er wird zu dem zu verschlüsselnden Text modulo 2 addiert (also unter Verwendung der Rechenregeln  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 1 = 0$ ):

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \text{Text} \\ +\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \text{Schlüssel} \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ \text{verschlüsselter Text} \end{array}$$

Zur Entschlüsselung wird der Schlüssel nach den gleichen Regeln zum verschlüsselten Text addiert, und es entsteht wieder der ursprüngliche Text:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ \text{verschlüsselter Text} \\ +\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \text{Schlüssel} \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \text{ursprünglicher Text} \end{array}$$

In der Kryptographie wird nun der verschlüsselte Text über einen abhörbaren klassischen Kanal (Telefon) oder sogar öffentlich (Zeitung) übertragen. Der Schlüssel, der einzig dem Sender und dem Empfänger zur Verfügung stehen soll, muss demgegenüber absolut geheim bleiben. Er soll eine völlig zufällige Abfolge der Zahlen 0 und 1 sein und darf nur einmal benutzt werden. Das Problem besteht damit in der Schlüsselübermittlung. Der Schlüssel kann entweder zwischen Sender und Empfänger ausgetauscht werden, oder je

eine Kopie des Schlüssels wird von einer Quelle dem Sender und dem Empfänger zugesandt. Wir wenden den zweiten Fall betrachten.

Der wesentliche Punkt, mit dem wir an die Quantentheorie wieder anknüpfen, ist nun der folgende: Zur Sicherung der Geheimhaltung reicht es aus, wenn Sender und Empfänger jeweils feststellen können, ob die Schlüsselübermittlung abgehört wurde. Wenn sie sich überzeugt haben, dass das nicht der Fall ist, verwenden sie den Schlüssel. Wenn abgehört wurde, verwerfen sie beide den Schlüssel und warten darauf, dass ihnen die Quelle einen neuen Schlüssel übermittelt, bei dem wieder beide getrennt prüfen, ob er abgehört wurde usw. Es sind somit zwei Prozeduren nötig, eine Schlüsselübermittlung und ein Abhörtest. Die verschränkten Photonen des vorigen Abschnitts erlauben beides.

Zur *Schlüsselübermittlung* wird öffentlich die Orientierung  $[x,x]$  der parallel ausgerichteten Analytoren in I und II festgelegt, das heißt, die  $x$ -Achse wird öffentlich fixiert. Wir hatten gesehen, dass dann in statistischer Weise als Messergebnispaar entweder  $(x,x)$  oder  $(y,y)$  registriert wird.  $(x,x)$  wird in I und II als Übermittlung der Schlüsselzahl 0 aufgefasst.  $(y,y)$  gilt als Übermittlung der Schlüsselzahl 1. Beide Zahlen treten völlig zufällig und im Mittel gleich häufig auf. Die Frage ist nun, ob die Übermittlung geheim geblieben ist. Für den *Abhörtest* rufen wir uns noch einmal die vier Orientierungen der gegeneinander verdrehten Analytoren im Raum in Erinnerung, wie sie in Abbildung 2.5 dargestellt sind (die nicht eingezeichneten  $y$ -Richtungen stehen jeweils senkrecht). Wir wählen die Einstellung  $\Theta = 22,5^\circ$ . Dann wird im Experiment für  $S(\Theta)$  der quantentheoretische Maximalwert  $S_{\max}^{\text{QM}}$  erreicht. Wenn das Quantensystem durch einen messenden Eingriff abgeändert wurde, ist  $S(\Theta)$  hingegen kleiner. Schlüsselübermittlung und Abhörtest werden nun kombiniert, indem immer wieder auch von einem öffentlichen Kanal Gebrauch gemacht wird. Die Beobachter in I und II, die einen nicht abgehörten Schlüssel erhalten wollen, gehen dabei Schritt für Schritt vor:

Zunächst werden öffentlich die vier Raumorientierungen  $x,x',x'',x'''$  aus Abbildung 2.5 einheitlich in I und II festgelegt. Damit liegen auch die entsprechenden  $y$ -Orientierungen der Analytoren fest. Die Quelle produziert in bestimmten zeitlichen Abständen Paare verschränkter Photonen.

Verdeckt stellt man nun in I und II unabhängig voneinander und willkürlich die Analytoren für jedes Photonenpaar neu in einer der vier Orientierungen auf. Es wird an beiden Orten die Orientierung des jeweiligen Analysators notiert und auch festgehalten, ob bei dieser Orientierung die entsprechende  $x$ - oder die  $y$ -Richtung bei der Messung am Photon als Polarisation festgestellt wurde. So wird für sehr viele Photonenpaare verfahren.

Nach all diesen verdeckten Messungen kommt dann wieder der öffentliche Kanal zum Einsatz. Die Beobachter in I und II tauschen aus, welche Orientierungen sie bei der Messung am ersten Paar, am zweiten Paar usw. eingestellt hatten.

Dann sortiert jeder der beiden für sich und verdeckt die Messergebnisse unter Beibehaltung der zeitlichen Reihenfolge danach, ob die Analytoren in I und II parallel standen oder gegeneinander verdreht waren. Damit sind wir bei Schlüsselübermittlung und Abhörtest angekommen.

Beide Beobachter wissen, wann die Analysatoren gegeneinander verdrickt waren. Die Messergebnisse, die sie in diesen Fällen gewonnen haben, tauschen beide im nächsten Schritt über den öffentlichen Kanal aus. Beide besitzen damit alle Informationen, die gemäß unseren Überlegungen in Abschnitt 2.5 nötig waren, um  $S(\Theta)$  zu berechnen, und können daher für sich prüfen, ob der Wert von  $S_{\max}^{\text{QM}}$  vorliegt. Ist das nicht der Fall, dann hat ein Lauscher versucht abzuhören; die ganze Messreihe wird verworfen und neu begonnen. Im anderen Fall wissen beide Beobachter, dass nicht abgehört wurde.

Beide Beobachter betrachten nun schließlich ihre Messergebnisse für den Fall der parallel ausgerichteten Analysatoren, die sie geheim gehalten haben. Wie wir gesehen haben, ermöglicht die parallele Ausrichtung eine Schlüsselübertragung. Diese ist damit mit einer im Prinzip absoluten Geheimhaltung geglückt.

Um Abhörversuche zu verhindern, verwendet die klassische Kryptographie mathematische Verschlüsselungstechniken. Diese lassen sich wiederum durch mathematische Techniken überwinden. Wer den schnelleren Computer und die bessere Software hat, kann den Code knacken. In der *Quantenkryptographie* hingegen wird die Information durch die Gesetze der Physik selbst geschützt. Sie lassen sich – jedenfalls im Prinzip – nicht hintergehen. Wie man die Quantenkryptographie technisch realisieren kann, ist eine andere Frage.<sup>14</sup>

## 2.7 Schafe kann man klonen, Photonen nicht

Wie bereits gezeigt wurde, kann man für das Ergebnis einer einzelnen Quantenmessung im allgemeinen nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage treffen. Erst wenn man die Messung im Prinzip unendlich oft wiederholt, indem man das Quantensystem immer im gleichen Zustand präpariert und die gleiche Messung durchführt, dann ergibt sich zum Beispiel für den Messwert 1 von Zustand (1.8) die relative Häufigkeit  $P_1$  aus Gleichung (1.9). Das legt die Vermutung nahe, dass man über die Faktoren  $c_1$  und  $c_2$  und damit über den Zustand  $|\Psi\rangle$  aus Gleichung (1.8) erst dann etwas erfährt, wenn man diesen zumindest sehr häufig in gleicher Weise präpariert und anschließend wie oben beschrieben verfährt. Was weiß man über die Bestimmung eines Quantenzustandes? Wir wollen noch einmal von einer anderen Seite ein Licht auf den Quantenmessprozess werfen. Dabei werden uns erneut verschränkte Systeme begegnen.

Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, dass es – anders als in der klassischen Physik – im Quantenbereich nicht immer möglich ist, mit einer einzigen Messung zwischen zwei beliebigen Zuständen zu unterscheiden. Ein Beispiel mag das verdeutlichen.

<sup>14</sup> Experimente zur Quantenkryptographie werden in diesem Buch im Beitrag von H. Weinfurter beschrieben. Um die Verschränkung von Atomen mit Photonen an verschiedenen Orten nutzen zu können, braucht man für die Informationsübertragung einzelne Photonen. Für Einzel-Photon-Quellen siehe die Artikel von G. Rempe (Kap. 5) und H. Weinfurter (Kap. 6).

Angenommen, wir wollten durch eine Messung unterscheiden, ob der Zustand  $|1\rangle$  oder der Zustand  $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  vorliegt. Wenn der Zustand  $|1\rangle$  vorliegt, ergibt sich das Messergebnis 1 mit Sicherheit. Wenn der Zustand  $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  vorliegt, ergibt sich jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  der Messwert 1 bzw. 2. Wir können aber nur einmal messen. Erhalten wir dabei den Messwert 2, so können wir mit Sicherheit auf das Vorliegen von  $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$  schließen; der Messwert 1 liefert uns demgegenüber keinerlei verwendbare Information.

Der allgemeine Satz, der hinter dieser Beobachtung steckt, lautet: Es ist unmöglich, mit einer einzelnen Quantenmessung zwischen zwei nicht orthogonalen Zuständen zu unterscheiden. In der klassischen Physik können verschiedene Zustände eines Systems mit einer Messung unterschieden werden, im Quantenbereich geht das nicht. Dies ist offenbar ein sehr entscheidender Satz. Aber kann man ihn nicht für alle praktischen Anwendungen in einfacher Weise umgehen? Man müsste doch nur sehr viele Kopien des unbekanntes Zustandes herstellen und Messungen an diesen Kopien vornehmen. Beim obigen Beispiel träte dann entweder nur der Messwert 1 auf oder die Messwerte 1 und 2 mit gleicher Häufigkeit; so wäre eine klare Unterscheidung zwischen den Zuständen möglich. Die Frage ist allerdings, ob man unbekanntes quantenmechanische Zustände überhaupt „klonen“ oder kopieren kann.

Tatsächlich macht uns die Linearität der Quantenmechanik, die wir bereits in Abschnitt 1.6 kennengelernt haben, dabei einen Strich durch die Rechnung. Nehmen wir an, man könnte kopieren. Das zu kopierende Quantensystem, der *Quantenkopierer* und die Kopie bilden ein zusammengesetztes System. Der Quantenkopierer möge am Anfang im Zustand  $|k_0\rangle$  sein. Während er den Systemzustand  $|1\rangle$  kopiert, geht er selbst in den Zustand  $|k_1\rangle$  über; wenn er den Zustand  $|2\rangle$  kopiert, geht er in den Zustand  $|k_2\rangle$  über. Es ereignet sich also einer der beiden folgenden quantenmechanischen Prozesse, von denen wir nur die Anfangs- und Endzustände hinschreiben:

$$|1\rangle|k_0\rangle \rightarrow |1\rangle|1\rangle|k_1\rangle \quad (2.13)$$

$$|2\rangle|k_0\rangle \rightarrow |2\rangle|2\rangle|k_2\rangle \quad (2.14)$$

Der Quantenkopierer überführt im Rahmen der Dynamik I Anfangszustände in Endzustände. Dies macht er in linearer Weise (siehe Gleichung (1.13)): Wenn der Ausgangszustand eine Summe von Zuständen ist, ergibt sich der Endzustand als Summe der Endzustände der einzelnen Teilstände. In unserem Fall haben wir daher unter Verwendung der Produktregel

$$(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle)|k_0\rangle \rightarrow c_1|1\rangle|1\rangle|k_1\rangle + c_2|2\rangle|2\rangle|k_2\rangle. \quad (2.15)$$

Bemerkenswerterweise ist damit wieder einmal ein verschränkter Zustand entstanden. Hätte unsere Maschine tatsächlich wie ein Kopierer gewirkt, hätte das Ergebnis allerdings anders ausgesehen:

$$(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle)|k_0\rangle = (c_1|1\rangle + c_2|2\rangle)(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle) |k'\rangle. \quad (2.16)$$

$|k'\rangle$  ist dabei der Endzustand des Kopierers. Das Ergebnis hätte also ein Produktzustand sein müssen. Nur wenn entweder  $c_1$  oder  $c_2$  gleich null ist, wurde tatsächlich kopiert. Die Konsequenz ist: Es gibt keinen Quantenkopierer, der beliebige Zustände kopieren kann. Quantenzustände können nicht geklont werden (Wootters (1982), Dieks (1982)). Man nennt das auch das quantenmechanische *No-cloning-Theorem*.<sup>15</sup> Klonen würde die Linearität der Quantenmechanik verletzen. Damit ist unsere Idee zur Ausmessung eines unbekanntem Quantenzustands gescheitert. Die No-cloning-Eigenschaft scheint destruktiv zu sein. Wir wollen zeigen, dass sie sich auch sehr konstruktiv auswirken kann. Indem sie etwas verhindert, schützt sie die Quantenmechanik vor einem Widerspruch mit der Speziellen Relativitätstheorie.

Wir kehren noch einmal zu unseren verschränkten Photonen von Abschnitt 2.4 zurück. Angenommen, man könnte klonen und wir hätten eine Kopiermaschine für unbekannte Zustände, dann könnten wir diese mit einer verhängnisvollen Auswirkung in den Versuchsablauf einbauen.

Um das zu verdeutlichen, wollen wir zunächst eine kleine Rechnung nachtragen. Wir betrachten im Versuchsaufbau von Abschnitt 2.4 Analysatororientierungen, die um  $\Theta = 45^\circ$  gegeneinander verdreht sind. Ein Blick auf Abbildung 2.4 zeigt dann, dass für die Zustandsvektoren  $|x\rangle = (|x'\rangle + |y'\rangle)/\sqrt{2}$  und  $|y\rangle = (-|x'\rangle + |y'\rangle)/\sqrt{2}$  gilt. Einsetzen in Gleichung (2.7) ergibt nach einfacher Rechnung, dass der Zustand  $|\Phi\rangle$  auch in der Form

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x'_1, x'_2\rangle + |y'_1, y'_2\rangle) \quad (2.17)$$

geschrieben werden kann. Wenn man nun in I den Analysator nach den Richtungen  $x$  und  $y$  orientiert, dann wird der Gesamtzustand nach der Messung in I mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  in  $|x_1, y_2\rangle$  und mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  in  $|y_1, y_2\rangle$  überführt. Nach der Messung hat das Photon, das auf den Analysator in II zuläuft, entsprechend den Zustand  $|x_2\rangle$  oder  $|y_2\rangle$  erhalten. Gleichung (2.17) zeigt, dass bei gleichem Zustand  $|\Phi\rangle$  Analoges gilt, wenn in I der Analysator um  $\Theta = 45^\circ$  gedreht wurde. Dann überführt eine Messung in den Gesamtzustand  $|x'_1, x'_2\rangle$  oder  $|y'_1, y'_2\rangle$  und sofort liegt beim Analysator II der Zustand  $|x'_2\rangle$  oder  $|y'_2\rangle$  vor. Wenn es nun irgend eine Möglichkeit gäbe, in II durch eine Messung zwischen  $|x_2\rangle, |y_2\rangle, |x'_2\rangle, |y'_2\rangle$  zu unterscheiden, dann könnte man von I nach II mit Hilfe der verschränkten Photonenpaare eine Botschaft übertragen: Zur Übermittlung einer „0“ würde in I die Orientierung  $\Theta = 0^\circ$  gewählt und zur Übermittlung einer „1“ die Orientierung  $\Theta = 45^\circ$ . In II könnte diese Information unmittelbar abgelesen werden, wenn die Photonenquelle in der Mitte liegt. Offenbar wäre in diesem Fall die Spezielle Relativitätstheorie verletzt. Da aber, wie wir eingangs gesehen hatten, durch keine Messung in II eine Unterscheidung zwischen den gestrichenen und ungestrichenen Zuständen möglich ist, kann

<sup>15</sup> Die Bedeutung dieses Theorems für die Quanten-Informationstheorie wird in diesem Buch von R. F. Werner (Kap. 7.2) angesprochen.

die Information tatsächlich nicht übertragen werden und die Spezielle Relativitätstheorie schon genügt zu sein.

Tatsächlich ist sie es aber noch nicht ganz. Wenn man nämlich in II einen Quantenkopierer aufstellen könnte, könnte man den dort ankommenden Zustand sehr schnell in sehr hoher Zahl kopieren und mit Analysatoren in  $x$ - $y$ - und  $x'$ - $y'$ -Orientierung Messungen durchführen. Dann ließe sich der in II vorliegende Zustand bestimmen und die Signalübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit wäre geglückt. Erst die Nichtexistenz eines Quantenkopierers verhindert auch diese Möglichkeit.

Es gelingt also nicht, mit Hilfe von Verschränkung einen Widerspruch zwischen Quantentheorie und Spezieller Relativitätstheorie herzustellen. Die Quantentheorie selber schützt sich davor. Das ist ein weiteres Mal ein durchaus verblüffendes Ergebnis, denn Quantentheorie und Relativitätstheorie sind zwei Theorien ganz unterschiedlicher Bauart, die völlig unabhängig voneinander entstanden sind. Unter diesem Aspekt hätte Einstein sich eigentlich mit der von ihm nicht geliebten Quantentheorie anfreunden müssen.

## 2.8 Die Teile und das Ganze

Wir wollen abschließend noch einen interpretierenden Blick zurück werfen. Bei einem zusammengesetzten Quantensystem kann man auch bei Verschränkung durchaus noch von den Einzelsystemen sprechen. So kann es sich um zwei Photonen handeln, die in unterschiedliche Richtungen fliegen und an denen man Polarisationsmessungen durchführt. Die Orte dieser jeweiligen Messungen können dabei kilometerweit voneinander entfernt sein. Obwohl zwischen den Untersystemen keinerlei Wechselwirkung stattfindet, sind die Systeme – in nichtklassischer Weise – korreliert. Die Quantenwelt ist *nichtlokal*.

Das Beispiel aus Gleichung (2.4) belegt, dass bei Vorliegen von Verschränkung anders als beim Produktzustand in Gleichung (2.3) den Untersystemen kein eigener Zustandsvektor mehr zugeordnet werden kann. Wie wir bereits wissen, kann man Einzelsystemen im Allgemeinen zwar einen Zustandsvektor, aber keine Eigenschaften zuschreiben. So haben sie zum Beispiel erst nach der Messung von „Ort“ auch die Eigenschaft „Ort“ und diese hat einen speziellen Wert. Bei verschränkten Systemen stellen wir nun fest, dass bei den Untersystemen Entsprechendes sogar für den Zustand selber gilt. Erst nach der Messung an einem Untersystem kann man diesem überhaupt einen Zustand zusprechen. In einem verschränkten zusammengesetzten System hat das Einzelsystem nicht einmal mehr die Eigenschaft, einen eigenen Zustand zu besitzen. Die Liste derjenigen Dinge, die in der Quantentheorie verglichen mit der klassischen Physik verloren gegangen sind, müssen wir jetzt noch erweitern um den „Zustand eines Untersystems“ in einem (verschränkten) zusammengesetzten System. Wir sollten daher auch gar nicht mehr versuchen, uns Zustände von Untersystemen vorzustellen, sondern immer nur den einen Zustand des Gesamtsystems im Blick haben und nur von ihm sprechen.

Die Formulierung „verloren gegangen“ sollte man nicht negativ verstehen. Sie stellt vielmehr eine positive Charakterisierung dar. Die Quantentheorie ist allgemeiner als die klassischen Theorien. Sie sprengt den Rahmen, der diese Theorien einschränkt. Allerdings drängt sich sofort ein Problem auf: Wie kann die klassische Physik als Grenzfall der Quantenphysik wiedergewonnen werden? Eine Antwort gibt es darauf bisher nicht, wohl aber Lösungsansätze.<sup>16</sup> Offensichtlich hat Verschränkung das Problem noch verschärft: Warum gelingt Verschränkung zum Beispiel bei zwei Photonen, aber nie bei zwei Stühlen oder anderen klassischen Objekten? Oben hatten wir gesagt, dass Verschränkung das „Normale“ sei. Diese Aussage müssen wir auf die Quantenwelt einschränken, aber wie kann man das theoretisch begründen?

In der klassischen Physik bestimmen die Zustände der Untersysteme den Zustand des Gesamtsystems (*Separabilität*). Wenn ein zusammengesetztes System nicht separabel ist, nennt man es *holistisch*. Mit den verschränkten Quantensystemen hat man in der Natur echten Holismus gefunden.<sup>17</sup> Bei ihnen ist das Ganze mehr als die Summe seiner Teile, und das, obwohl keine Wechselwirkung zwischen den Teilen besteht.<sup>18</sup>

## Literatur

- A. Aspect, P. Grangier und G. Roger (1981), *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460.  
 A. Aspect, P. Grangier und G. Roger (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91.  
 J. Audretsch, K. Mainzer (1990 und 1996) (Hrsg.), „Wieviele Leben hat Schrödingers Katze? Zur Physik und Philosophie der Quantenmechanik“, Heidelberg.  
 J. Audretsch (1991), *Physik und Didaktik* **2**, 130.  
 I. G. Barbour (1966), „Issues in Science and Religion“, New York.  
 J. S. Bell (1964), *Physics* **1**, 195.  
 D. Bohm (1952), *Phys. Rev.* **85**, 166, 180.  
 J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony und R. A. Holt (1969), *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880.  
 D. Dieks (1982), *Phys. Lett.* **A92**, 271.  
 A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen (1935), *Phys. Rev.* **47**, 777.  
 A. K. Ekert (1991), *Phys. Rev. Lett.* **67**, 667.  
 P. G. Kwiat, A. M. Steinberg und R. Y. Chiao (1992), *Phys. Rev.* **A45**, 7729.  
 R. J. Russel (1988), „Quantum Physics in Philosophical and Theological Perspective“, in: „Physics, Philosophy and Theology: A Common Quest for Understanding“, R. J. Russel, W. R. Stoeger und G. V. Coyne (Hrsg.), S. 343–374, Vatikanstadt.  
 E. Schrödinger (1935), *Naturwiss.* **23**, 807–812, 823–828, 844–849.  
 M. O. Scully, B.-G. Englert und H. Walther (1991), *Nature* **351**, 111.  
 W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden und N. Gisin (1998), *Phys. Rev.* **A57**, 3229.  
 W. K. Wootters und W. Zurek (1982), *Nature* **299**, 802.

<sup>16</sup> Siehe den Artikel von E. Joos (Kap. 8) in diesem Buch.

<sup>17</sup> Die naturphilosophischen Konsequenzen werden im Artikel von M. Esfeld (Kap. 9) diskutiert.

<sup>18</sup> Dass die naturphilosophischen Konsequenzen der Quantentheorie bis in die Theologie hinein Beachtung gefunden haben (siehe u. a. Russel (1988) und Barbour (1966)), ist kaum bekannt.